MỞ ĐẦU

Bài toán quy hoạch toàn phương truyền thống có dạng

$$f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \inf, \quad x \in D$$

trong đó $A \in I\!R^{n\times n}$ là ma trận vuông, $b \in I\!R^n$ là véc tơ và $D \subset I\!R^n$ là tập lồi.

Cùng với bài toán quy hoạch lồi, bài toán quy hoạch toàn phương được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước nghiên cứu, ví dụ như H. W. Kuhn và A. W. Tucker (1951), B. Bank và R. Hasel (1984), E. Blum và W. Oettli (1973), B. C. Eaves (1971), M. Frank và P. Wolfe (1956), O. L. Magasarian (1980), G. M. Lee, N. N. Tam và N. D. Yen (2005), H. X. Phu (2007), H. X. Phu và N. D. Yen (2001), M. Schweighofer (2006), H. Tuy (1964, 1983, 2007), H. H. Vui và P. T. Son (2008)...

Khi A là ma trận nửa xác định dương hoặc nửa xác định âm thì bài toán trên phân rã thành các bài toán khác nhau sau:

$$f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \inf, \quad x \in D \tag{P}$$

và

$$f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \sup, \quad x \in D, \tag{Q}$$

Luận án này nghiên cứu các bài toán quy hoạch toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội sau:

$$\tilde{f}(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + p(x) \to \inf, \quad x \in D \tag{$\tilde{P}$}$$

và

$$\tilde{f}(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + p(x) \to \sup, \quad x \in D, \tag{$\tilde{Q}$}$$

trong đó $p : D \to I\!R$ là thỏa mãn điều kiện $\sup_{x\in D} |p(x)| \leq s$ với giá trị $s \in [0, +\infty[$ và A trong các bài toán (P), (Q), $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$ được giả thiết là ma trận đối xứng xác định dương.

Vì sao các bài toán trên được chọn để nghiên cứu? Rõ ràng, các bài toán (P) và (Q) là các trường hợp riêng của các bài toán $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$. Đây là lý do để chúng tôi tiến hành nghiên cứu các bài toán trên, tối thiểu từ quan điểm lý thuyết. Tuy nhiên, còn một số lý do thực tế khác dưới đây, cho thấy việc nghiên cứu các bài toán $(\tilde{P}), (\tilde{Q})$ là thực sự cần.

Lý do thứ nhất: $f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ là hàm mục tiêu ban đầu và p là hàm nhiễu nào đó. Hàm nhiễu p có thể bao gồm các tác động bổ sung (tất định hoặc ngẫu nhiên) lên hàm mục tiêu và các lỗi gây ra trong quá trình mô hình hóa, đo đạc, tính toán... Điểm đặc biệt là ở chỗ, chúng ta hạn chế chỉ xét nhiễu giới nội. Hạn chế này là không quá ngặt, có thể được thỏa mãn trong nhiều bài toán thực tế chẳng hạn như hai ví dụ minh họa sau đây.

Một trong những ứng dụng nổi bật của quy hoạch toàn phương là bài toán lựa chọn đầu tư (H. M. Markowitz (1952, 1959)). Bài toán phát biểu như sau: Phân phối vốn qua n chứng khoán (asset) có sẵn để có thể giảm thiểu rủi ro và tối đa lợi nhuận, tức là tìm véc tơ tỉ lệ $x \in D,\ D := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\}$ để $f(x) = \omega x^T Ax - \rho^T x$ đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó $x_j, j = 1, \ldots, n$, là tỷ lệ chứng khoán thứ j trong danh mục đầu tư, ω là tham số rủi ro, $A \in I\!R^{n\times n}$ là ma trận hiệp phương sai, $\rho \in I\!R^n$ là véc tơ lợi nhuận kỳ vọng. Vì A và ρ thường không được xác định chính xác mà chỉ xấp xỉ bởi $\tilde{A}$ và $\tilde{\rho}$, do đó chúng ta phải cực tiểu hóa hàm $\tilde{f}(x) = \omega x^T\tilde{A}x - \tilde{\rho}^T x = f(x) + p(x)$, trong đó $p(x) = \omega x^T(\tilde{A} - A)x - (\tilde{\rho} - \rho)^T x$. Khi quy định không được bán khống, tức là $x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$, thì tập chấp nhận được D là giới nội. Vì vậy nhiễu p cũng giới nội trên D. Nói một cách tổng quát, tính giới nội của nhiễu luôn đảm bảo khi D giới nội và p liên tục trên D. Giả thiết này là phù hợp với nhiều bài toán thực tế.

Một ví dụ nữa cho thấy là nhiễu giới nội luôn xuất hiện khi giải một bài toán tối ưu (P) hoặc (Q) nào đó bằng máy tính. Do phần lớn các số thực không thể biểu diễn chính xác bằng máy tính, nên đối với hầu hết $x \in D$ ta không thể tính chính xác đại lượng $f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ mà chỉ có thể xấp xỉ $f(x)$ bởi một số dấu chấm động $\tilde{f}(x)$ nào đó. Hàm $\tilde{f}$ không lồi, không toàn phương và thậm chí là không liên tục trên D. Khi đó hàm $p := \tilde{f} - f$ mô tả các lỗi tính toán. Các lỗi đó bị chặn bởi một cận trên $s \in [0, +\infty[$ nào đó có thể ước lượng được, tức là $\sup_{x\in D} |p(x)| \leq s$. Ngoài ra, bằng cách sử dụng các số dấu chấm động dài hơn và/hoặc các thuật toán tốt hơn, ta có thể giảm cận trên s.

Lý do thứ hai: $\tilde{f}$ là hàm mục tiêu đích thực và f là hàm mục tiêu được lý tưởng hóa hoặc là hàm mục tiêu thay thế. Trong thực tiễn, nhiều hàm thể hiện một số mục tiêu thực tế được giả thiết là lồi, hoặc toàn phương, hoặc có một số tính chất thuận tiện đã được nghiên cứu kỹ, hoặc dễ nghiên cứu, nhưng thực tế không phải là như vậy. Điều này đã được H. X. Phu, H. G. Bock và S. Pickenhain (2000) đề cập đến. Trong bối cảnh đó, $p = \tilde{f} - f$ là hàm hiệu chỉnh. Có thể giả thiết p là giới nội (tối thiểu trên tập chấp nhận được) bởi một số dương khá bé s, vì nếu $|p(x)|$ quá lớn thì sự thay thế không còn phù hợp nữa.

Để giải thích điều này, ta đề cập đến vấn đề thường được nghiên cứu của phát điện tối ưu, tức là vấn đề phân bố lượng điện năng cho từng tổ máy phát nhiệt điện sao cho tổng chi phí (giá thành) là cực tiểu, đồng thời vẫn đáp ứng được nhu cầu lượng điện năng và thoả mãn ràng buộc về công suất phát ra của mỗi tổ máy. Người ta thường giả thiết (P. P. J. Van den Bosch và F. A. Lootsma (1987), R. M. S. Danaraj và F. Gajendran (2005)), hàm chi phí tổng cộng (bao gồm chi phí nhiên liệu (fuel cost), chi phí tải sau (load-following cost), chi phí dự phòng quay (sprinning-reserve cost), chi phí dự phòng bổ sung (supplemental-reserve cost), chi phí tổn thất phát và truyền dẫn điện năng) là hàm toàn phương, lồi ngặt và có dạng

$$F(P) = \sum_{i=1}^{n} F_i(P_i),$$

trong đó n là số tổ máy phát, $P := (P_1, P_2, \ldots, P_n)$, $P_i \in [P_{i\min}, P_{i\max}]$ là lượng điện năng phát ra của tổ máy thứ i, $P_{i\min}, P_{i\max}$ là công suất phát nhỏ nhất và lớn nhất của tổ máy phát thứ i và $F_i(P_i) = a_i + b_iP_i + c_iP_i^2$ là hàm chi phí của tổ máy phát thứ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dĩ nhiên giả thiết toàn phương, lồi ngặt của hàm mục tiêu là quá lý tưởng. Chi phí thực tế có thể không là hàm toàn phương và cũng không là hàm lồi ngặt. Như vậy, để giả thiết về tính toàn phương và lồi ngặt của hàm mục tiêu được thỏa mãn, cần hàm giới nội p hiệu chỉnh hàm chi phí thực tế. Đặc biệt, nếu hiệu ứng điểm-van được xét đến (P. P. J. van den Bosch và F. A. Lootsma (1987), R. M. S. Danaraj và F. Gajendran (2005),...) thì hàm chi phí toàn phương phải được hiệu chỉnh bởi tổng hữu hạn các hàm dạng sin, tức là

$$F(P) = \sum_{i=1}^{n} \big(F_i(P_i) + |e_i \sin(f_i(P_{i\min} - P_i))|\big),$$

trong đó e_i, f_i là các hệ số của hiệu ứng điểm-van. Rõ ràng hàm hiệu chỉnh $p := \sum_{i=1}^{n} |e_i \sin(f_i(P_{i\min} - P_i))|$ là giới nội.

Để ngắn gọn, ta thường gọi p là hàm nhiễu (mặc dù nó không chỉ đóng vai trò đó như đã giải thích ở trên), $\tilde{f}$ là hàm bị nhiễu và $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$ là các bài toán nhiễu. Thật ra, chúng chỉ là các thuật ngữ vay mượn, không phải lúc nào cũng chính xác như thường lệ.

Những vấn đề gì là mới cơ bản khi nghiên cứu các bài toán $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$? Câu hỏi này là cần thiết, vì đã có những kết quả nghiên cứu đặc sắc theo các khía cạnh khác nhau về tính ổn định của các bài toán nhiễu lồi và/hoặc nhiễu toàn phương. Điểm chung của phần lớn các công trình nghiên cứu từ trước đến nay là nhiễu không làm thay đổi những thuộc tính tiêu biểu của bài toán ban đầu. Ví dụ bài toán lồi bị nhiễu vẫn giữ nguyên tính lồi (như trong các nghiên cứu của M. J Canovas (2008), D. Klatte (1997), B. Kumer (1984), ...) và các bài toán toàn phương giữ được tính toàn phương (như trong các nghiên cứu của J. V. Daniel (1973), G. M. Lee, N. N. Tam và N. D. Yen (2005), K. Mirnia và A. Ghaffari-Hadigheh (2007), H. X. Phu (2007), H. X. Phu và N. D. Yen (2001)...). Điều khác biệt là, hàm mục tiêu $\tilde{f}$ của các bài toán nhiễu trong luận án này không lồi, không toàn phương mặc dù hàm f là lồi ngặt và toàn phương. Hơn nữa, vì nhiễu p chỉ giả thiết là giới nội, nên hàm bị nhiễu $\tilde{f}$ có thể không liên tục tại bất cứ điểm nào. Với những hàm mục tiêu như vậy, dường như sẽ không thể thu được kết quả gì đặc biệt. Mục tiêu của luận án là chỉ ra điều ngược lại.

Luận án gồm 4 chương.

Chương 1 trình bày bài toán quy hoạch lồi, bài toán quy hoạch toàn phương, một số loại hàm lồi thô như γ-lồi ngoài, Γ-lồi ngoài, γ-lồi trong cùng một số tính chất tối ưu của chúng.

Chương 2 nghiên cứu tính γ-lồi ngoài của hàm toàn phương với nhiễu giới nội, các tính chất của điểm cực tiểu toàn cục, điểm infimum toàn cục của

Bài toán $(\tilde{P})$, khảo sát tính ổn định nghiệm và mở rộng Định lý Kuhn-Tucker cho bài toán này.

Chương 3 nghiên cứu tính Γ-lồi ngoài của hàm mục tiêu $\tilde{f}$ (theo cách tiếp cận tô pô), qua đó nhận được một số kết quả mạnh hơn những kết qủa nghiên cứu về điểm cực tiểu toàn cục, điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ được chỉ ra trong Chương 2.

Chương 4 nghiên cứu tính γ-lồi trong của hàm mục tiêu $\tilde{f}$, tính ổn định của tập các điểm supremum toàn cục và tính ổn định của tập các điểm supremum địa phương của Bài toán $(\tilde{Q})$.

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Hoàng Xuân Phú và PGS. TS. Phan Thanh An. Tác giả chân thành cảm ơn sự giúp đỡ mọi mặt mà các Thầy đã dành cho. Tác giả bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và chân thành tới GS. TSKH. Hoàng Xuân Phú, Thầy đã quan tâm, hướng dẫn tác giả trong quá trình nghiên cứu. Tác giả bày tỏ lòng biết ơn đến GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên, PGS. TS. Tạ Duy Phượng, PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm và các đồng nghiệp thuộc Phòng Giải tích số và Tính toán Khoa học Viện Toán học vì đã có những ý kiến quý báu cho tác giả trong quá trình nghiên cứu.

Tác giả xin được bày tỏ lòng cảm ơn đến Ban chủ nhiệm Khoa Công Nghệ thông tin, Phòng Sau đại học và Ban Giám đốc Học viện Kỹ thuật Quân sự đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả có nhiều thời gian thực hiện luận án.

Tác giả cũng bày tỏ lòng biết ơn đến PGS. TS. Đào Thanh Tĩnh, PGS. TS. Nguyễn Đức Hiếu, PGS. TS. Nguyễn Thiện Luận, PGS. TS. Tô Văn Ban, TS. Nguyễn Nam Hồng, TS. Nguyễn Hữu Mộng, TS. Vũ Thanh Hà, TS. Nguyễn Mạnh Hùng, TS. Nguyễn Trọng Toàn, TS. Ngô Hữu Phúc, TS. Tống Minh Đức, TS. Lê Đình Sơn, TS. Trần Nguyên Ngọc và tất cả các đồng nghiệp trong Khoa Công Nghệ thông tin, HVKTQS, đã động viên, khích lệ và có những trao đổi hữu ích trong suốt thời gian nghiên cứu và công tác.

Tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc tới GS. TSKH. Phạm Thế Long, Giám đốc Học Viện KTQS, người đã tạo mọi điều kiện về chuyên môn cũng như thủ tục hành chính để tác giả có thể hoàn thành luận án này.

CHƯƠNG 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH LỒI, QUY HOẠCH TOÀN PHƯƠNG VÀ HÀM LỒI THÔ

Trong suốt luận án này, ta luôn ký hiệu $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide n chiều, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng xác định dương, $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ tương ứng, là các giá trị riêng nhỏ nhất, lớn nhất của A, $b \in \mathbb{R}^n$ và

- f là hàm toàn phương lồi ngặt có dạng

$$f(x) := \langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle,\ x \in D \tag{1.0.1}$$

- $p : D \to \mathbb{R}$ là hàm nhiễu giới nội, nghĩa là p thỏa mãn

$$\sup_{x\in D} |p(x)| \le s < +\infty. \tag{1.0.2}$$

- $\tilde{f} := f + p$ được gọi là hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội, gọi tắt là hàm bị nhiễu giới nội.

1.1. Bài toán quy hoạch lồi, quy hoạch toàn phương

Trong mục này, chúng tôi phát biểu

- Định lý Kuhn-Tucker cho bài toán quy hoạch lồi

$$\begin{aligned} g_0(x) &\to \inf, \quad x \in D \\ D = &\ \{x \in S \mid g_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m\}, \end{aligned} \tag{L}$$

  trong đó $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, m,$ là các hàm hàm lồi, $S \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi.

- Định lý về điều kiện tồn tại nghiệm tối ưu cho bài toán quy hoạch toàn phương

$$\begin{aligned} &\langle Mx, x\rangle + \langle b, x\rangle \to \inf, \quad x \in D \\ &D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle c_i, x\rangle \le d_i,\ i = 1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

  trong đó $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận đối xứng, $c_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m.$

Các định lý này sẽ được mở rộng trong các chương 2 và 3.

1.2. Hàm lồi suy rộng thô

Trong mục này chúng tôi trình bày tổng quan về khái niệm hàm lồi thô và một số tính chất quan trọng của các lớp hàm này.

1.3. Hàm γ-lồi ngoài

Trong mục này chúng tôi trình bày về hàm γ-lồi ngoài và một số tính chất tối ưu của lớp hàm này.

Định nghĩa 1.3.3. (H. X. Phu) *Cho* $\gamma > 0$. *Hàm* $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ *được gọi là* γ*-lồi ngoài (hoặc* γ*-lồi ngoài ngặt) với độ thô* γ*, nếu với mọi* x_0, $x_1 \in D$ *tồn tại* $k \in I\!N$ *và*

$$\lambda_i \in [0,1],\ i = 0,1,\dots,k,\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_k = 1,$$
$$0 \leq \lambda_{i+1} - \lambda_i \leq \frac{\gamma}{\|x_0 - x_1\|}\ \textit{khi}\ i = 0,1,\dots,k-1,$$

sao cho với $x_{\lambda_i} = (1-\lambda_i)x_0 + \lambda_i x_1,\ i = 0,1,\dots,k,$ *thì*

$$g(x_{\lambda_i}) \leq (1-\lambda_i)g(x_0) + \lambda_i g(x_1)\ \textit{với}\ \ i = 0,1,\dots,k,$$

(hoặc

$$g(x_{\lambda_i}) < (1-\lambda_i)g(x_0) + \lambda_i g(x_1)\ \textit{với}\ i = 1,\dots,k-1).$$

Định nghĩa 1.3.4. (H. X. Phu) *Cho* $\gamma > 0, M \subset I\!R^n, M \neq \emptyset$, M *được gọi là* γ*-lồi ngoài với độ thô* γ *nếu* $x_0, x_1 \in M$ *và* $\|x_0 - x_1\| > \gamma$ *suy ra tồn tại* $z_0 := x_0, z_1, \dots, z_k := x_1 \in [x_0, x_1] \cap M$ *sao cho*

$$\|z_{i+1} - z_i\| \leq \gamma\ \ \textit{với i=0, 1,\dots, k-1.}$$

Định nghĩa 1.3.5. (H. X. Phu) *Điểm* $x^* \in D$ *được gọi là*

1) *điểm* γ*-cực tiểu của* g *nếu tồn tại* $\epsilon > 0$ *sao cho* $g(x^*) \leq g(x)$ *với mọi* $x \in B(x^*, \gamma + \epsilon) \cap D$;

2) *điểm* γ*-infimum của* g *nếu tồn tại* $\epsilon > 0$ *sao cho*

$$\liminf_{x \to x^*} g(x) = \inf_{x \in B(x^*, \gamma+\epsilon) \cap D} g(x);$$

3) *điểm infimum toàn cục của g nếu*

$$\liminf_{x \to x^*} g(x) = \inf_{x \in D} g(x).$$

Tính chất tối ưu của hàm γ-lồi ngoài được chỉ ra bởi định lý sau:

Định lý 1.3.7. (H. X. Phu) *Nếu g là γ-lồi ngoài thì có các tính chất*

(M_γ) *Mỗi điểm γ-cực tiểu x^* của g là điểm cực tiểu toàn cục.*

(I_γ) *Mỗi điểm γ-infimum x^* của g là điểm infimum toàn cục.*

Đối với hàm lồi ngặt với nhiễu giới nội ta có mệnh đề sau về tính γ-lồi ngoài và lồi ngoài ngặt.

Mệnh đề 1.3.1. (H. X. Phu) *Cho $\gamma > 0$, $g : I\!R^n \to I\!R$ là hàm lồi và*

$$h_1(\gamma) := \inf_{x_0, x_1 \in D,\, \|x_0 - x_1\| = \gamma} \Big(\frac{1}{2}(g(x_0) + g(x_1)) - g\big(\frac{1}{2}(x_0 + x_1)\big)\Big) > 0.$$

Khi đó, nếu hàm nhiễu p thỏa mãn

$$|p(x)| \le h_1(\gamma)/2 \text{ với mọi } x \in D$$

thì hàm bị nhiễu $\tilde{g} = g + p$ là γ-lồi ngoài và nếu

$$|p(x)| < h_1(\gamma)/2 \text{ với mọi } x \in D$$

thì $\tilde{g} = g + p$ là γ-lồi ngoài ngặt.

1.4. Hàm Γ-lồi ngoài

Trong mục này chúng tôi trình bày lại một số tính chất của lớp hàm Γ-lồi ngoài. Chúng sẽ là cơ sở để nghiên cứu Bài toán $(\tilde{P})$ trong Chương 3.

Định nghĩa 1.4.6. (H. X. Phu) *Cho X là không gian véc tơ trên trường số thực, Γ là tập cân trong X tức là $\lambda\Gamma \subset \Gamma$ với mọi $|\lambda| \le 1$, và D là tập lồi trong X. Hàm $g : D \to I\!R$ được gọi là Γ-lồi ngoài nếu với mọi $x_0, x_1 \in D$ tồn tại tập đóng $\Lambda \subset [0,1]$ và chứa $\{0,1\}$ sao cho*

$$[x_0, x_1] \subset \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} + 0.5\Gamma \tag{1.4.4}$$

và

$$\forall \lambda \in \Lambda : g(x_\lambda) \le (1 - \lambda) g(x_0) + \lambda g(x_1). \tag{1.4.5}$$

Định nghĩa 1.4.7. (H. X. Phu) *Tập $S \subset X$ được gọi là Γ-lồi ngoài nếu với mọi $x_0, x_1 \in S$*

$$[x_0, x_1] \subset ([x_0, x_1] \cap S) + 0.5\Gamma,$$

tức là tồn tại $\Lambda \subset [0, 1]$ sao cho

$$\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset S,\ [x_0, x_1] \subset \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} + 0.5\Gamma. \qquad (1.4.6)$$

Mệnh đề 1.4.2. (H. X. Phu) *Tập mức dưới của hàm Γ-lồi ngoài là Γ-lồi ngoài.*

Định lý 1.4.8. (H. X. Phu) *Cho B là tập cân trong không gian véc tơ X. Khi đó $g : D \subset X \to I\!R$ là hàm Γ-lồi ngoài với $\Gamma = B$ khi và chỉ khi* epi g *là tập Γ-lồi ngoài với $\Gamma = B \times I\!R$.*

Định nghĩa 1.4.8. (H. X. Phu) *Cho $g : D \to I\!R$. Điểm $x^* \in D$ gọi là điểm Γ-cực tiểu của g nếu*

$$g(x^*) = \inf_{x \in (x^* + \Gamma) \cap D} g(x)$$

và gọi là Γ-infimum của g nếu

$$\liminf_{x \in X,\, x \to x^*} g(x) = \inf_{x \in (x^*_\Gamma) \cap D} g(x).$$

Tính chất tối ưu quan trọng của hàm Γ-lồi ngoài là định lý sau:

Định lý 1.4.9. (H. X. Phu) *Giả sử 0 là điểm trong của tập Γ và $g : D \to I\!R$ là hàm Γ-lồi ngoài. Khi đó*

$$g(x^*) = \inf_{x \in D \cap (\{x^*\} + \Gamma)} g(x) \Longrightarrow g(x^*) = \inf_{x \in D} g(x), \qquad (1.4.7)$$

tức là nếu x^* là điểm Γ-cực tiểu thì x^* là điểm cực tiểu toàn cục.

1.5. Hàm γ-lồi trong

Trong mục này chúng tôi trình bày khái niệm và một số kết quả về hàm γ-lồi trong, chúng sẽ được sử dụng để nghiên cứu Bài toán $(\tilde{Q})$ trong Chương 4.

Định nghĩa 1.5.9. (H. X. Phu) *Hàm $g : D \subset I\!R^n \to I\!R$ gọi là hàm γ-lồi trong (hoặc γ-lồi trong ngặt) trên D với độ thô $\gamma > 0$, nếu tồn tại độ tinh cố định $\nu \in]0,1]$ sao cho*

$$\begin{aligned}&\text{với mọi } x_0, x_1 \in D \text{ thỏa mãn } \|x_0 - x_1\| = \nu\gamma \\ &\text{và } x_{1+1/\nu} = -(1/\nu)x_0 + (1 + 1/\nu)x_1 \in D,\end{aligned}$$

thì

$$\sup_{\lambda \in [2, 1+1/\nu]} \Big(g((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) - (1-\lambda)g(x_0) - \lambda g(x_1) \Big) \geq 0,$$

(hoặc

$$\sup_{\lambda \in [2, 1+1/\nu]} \Big(g((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) - (1-\lambda)g(x_0) - \lambda g(x_1) \Big) > 0,$$

tương ứng).

Mệnh đề 1.5.6. (H. X. Phu) *Giả sử $g : D \to I\!R$ là γ-lồi trong với độ tinh ν. Nếu $x_1 \in D$ là điểm cực đại của g thì mọi điểm x_0 thỏa mãn*

$$\|x_0 - x_1\| = \nu\gamma, \quad x_{1+1/\nu} = -(1/\nu)x_0 + (1 + 1/\nu)x_1 \in D$$

cũng là điểm cực đại của g trên D.

Định lý 1.5.10. (H. X. Phu) *Cho $D \subset I\!R^n$ là tập lồi, giới nội và $g : D \to I\!R$ là hàm γ-lồi trong. Nếu g có điểm cực đại thì có ít nhất một điểm cực đại là điểm γ-cực biên ngặt của D.*

Định lý 1.5.11. (H. X. Phu) *Cho $g : D \to I\!R$ là hàm γ-lồi trong ngặt. Nếu g đạt cực đại trên D thì điểm cực đại là điểm γ-cực biên ngặt của D.*

Mệnh đề sau đây chỉ ra tính γ-lồi trong của hàm lồi ngặt bị nhiễu giới nội.

Mệnh đề 1.5.7. (H. X. Phu) *Cho $g : I\!R^n \to I\!R$ là hàm lồi và*

$$h_2(\gamma) := \inf_{x_0, x_1 \in D,\, \|x_0 - x_1\| = \gamma, -x_0 + 2x_1 \in D} \big(g(x_0) - 2g(x_1) + g(-x_0 + 2x_1) \big) > 0$$

và $\gamma > 0$. Khi đó, nếu hàm nhiễu p thỏa mãn

$$|p(x)| \leq h_2(\gamma)/4 \text{ với mọi } x \in D$$

thì hàm bị nhiễu $\tilde{g} = g + p$ là γ-lồi trong và nếu

$$|p(x)| < h_2(\gamma)/4 \text{ với mọi } x \in D$$

thì hàm bị nhiễu $\tilde{g} = g + p$ là γ-lồi trong ngặt.

CHƯƠNG 2

ĐIỂM INFIMUM TOÀN CỤC CỦA BÀI TOÁN $(\tilde{P})$

Chương này dành cho việc nghiên cứu tính γ-lồi ngoài của hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$; điểm infimum toàn cục; cận trên của đường kính của tập các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$; tính ổn định nghiệm của Bài toán $(\tilde{P})$ theo s; tính chất tựa và Định lý Kuhn-Tucker suy rộng cho Bài toán $(\tilde{P})$.

Trong suốt chương này chúng tôi ký hiệu $\gamma^* := 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ và $\lambda_{\min}$ là giá trị riêng nhỏ nhất của ma trận A.

2.1. Tính γ-lồi ngoài của hàm bị nhiễu giới nội

Mệnh đề quan trọng về tính γ-lồi ngoài của hàm bị nhiễu phát biểu như sau:

Mệnh đề 2.1.11. *Xét hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$, khi đó $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài với $\gamma \geq \gamma^*$ và γ-lồi ngoài ngặt với $\gamma > \gamma^*$.*

Áp dụng mệnh đề trên và định lý về tập mức dưới của hàm γ-lồi ngoài ta được:

Mệnh đề 2.1.13. *Tập mức dưới $\mathcal{L}_\alpha(\tilde{f})$ của hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ là tập γ-lồi ngoài với $\gamma \geq \gamma^*$.*

2.2. Điểm cực tiểu toàn cục và infimum toàn cục

Mệnh đề 2.2.14. *Xét hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$. Khi đó*

(a) *Nếu $x^* \in D$ là điểm γ- cực tiểu của $\tilde{f} = f + p$ với $\gamma \geq \gamma^*$, thì $x^* \in D$ là điểm cực tiểu toàn cục của $\tilde{f} = f + p$.*

(b) *Nếu x^* là điểm γ-infimum của $\tilde{f} = f + p$ với $\gamma \geq \gamma^*$ thì x^* là điểm infimum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$.*

Mệnh đề 2.2.15. *Ký hiệu* arg min $\tilde{f}$ *là tập các điểm cực tiểu toàn cục của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội* $\tilde{f} = f + p$. *Khi đó*

$$\|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2\| \leq \gamma^* \text{ với mọi } \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \arg\min \tilde{f},$$

tức là

$$\mathrm{diam}(\arg\min \tilde{f}) \leq \gamma^*.$$

2.3. Các tính chất của điểm infimum toàn cục

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu tính chất của tập các điểm infimum toàn cục và tính ổn định của tập các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ theo s.

Mệnh đề 2.3.16. *Nếu* $\tilde{x}_1^*$, $\tilde{x}_2^*$ *là hai điểm infimum toàn cục bất kỳ của Bài toán* $(\tilde{P})$ *thì*

$$\|\tilde{x}_1^* - \tilde{x}_2^*\| \leq \gamma^*.$$

Định lý 2.3.13. *Nếu* $\tilde{x}^* \in D$ *là điểm infimum toàn cục bất kỳ của Bài toán* $(\tilde{P})$ *và* x^* *là điểm cực tiểu toàn của Bài toán* (P), *thì*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2.$$

2.4. Tính chất tựa và điều kiện tối ưu của Bài toán $(\tilde{P})$

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu tính chất tựa suy rộng của hàm $\tilde{f} = f + p$, Định lý Kuhn-Tucker suy rộng cho Bài toán $(\tilde{P})$.

Định lý về tính chất tựa suy rộng của hàm toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$, được H. X. Phu chỉ ra như sau:

Mệnh đề 2.4.17. *Cho* $D = I\!R^n$. *Khi đó với* $x^* \in I\!R^n$ *và* $\epsilon > 0$ *thì*

$$\inf_{x' \in B(x^*, \gamma^*/2+\epsilon)} \left(\tilde{f}(x') - \langle 2Ax^* + b, x' \rangle\right) \leq \tilde{f}(x) - \langle 2Ax^* + b, x \rangle \text{ với mọi } x \in I\!R^n,$$

Đặc biệt, nếu p *là nửa liên tục dưới thì*

$$\min_{x' \in \bar{B}(x^*, \gamma^*)} \left(\tilde{f}(x') - \langle 2Ax^* + b, x' \rangle\right) \leq \tilde{f}(x) - \langle 2Ax^* + b, x \rangle \text{ với mọi } x \in I\!R^n.$$

Cho

$$D = \{x \in S \mid g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}, \tag{2.4.8}$$

trong đó $g_i : I\!R^n \to I\!R$, $i = 1, \ldots, m$, là các hàm lồi và $S \subset I\!R^n$ là tập lồi đóng. Hàm Lagrange của Bài toán $(\tilde{P})$ có dạng sau:

$$\mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m) := \lambda_0 \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x).$$

Ta có định lý sau:

Định lý 2.4.14. (Định lý Kuhn-Tucker suy rộng) *Giả sử D được cho bởi công thức* (2.4.8)*.*

(a) *Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, thì tồn tại duy nhất điểm $x^* \in D$ sao cho*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2$$

và các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, m$, không cùng triệt tiêu, thỏa mãn điều kiện Kuhn-Tucker

$$\mathcal{L}(x^*, \mu_0, \ldots, \mu_m) = \min_{x \in S} \mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m) \tag{2.4.9}$$

và điều kiện bù

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m. \tag{2.4.10}$$

Nếu điều kiện Slater

$$\exists z \in S : g_i(z) < 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m, \tag{2.4.11}$$

thỏa mãn thì $\mu_0 \neq 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$.

(b) *Nếu tồn tại $x^* \in D$ thỏa mãn* (2.4.9), (2.4.10) *với $\mu_0 = 1$ thì tồn tại $\tilde{x}^* \in D$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ trên D, thỏa mãn*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2$$

và mọi điểm infimum toàn cục nào của Bài toán $(\tilde{P})$ nằm trong hình cầu $\overline{B}(x^*, \gamma^*/2)$.

Dạng khác của Định lý Kuhn-Tucker cho Bài toán $(\tilde{P})$ phát biểu như sau:

Định lý 2.4.15. *Giả sử D được cho bởi (2.4.8) và $g_i : I\!R^n \to R$, $i = 1,\dots,m$, là các hàm lồi, cùng liên tục ít nhất tại một điểm của tập lồi $S \subset I\!R^n$.*

(a) *Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, thì tồn tại x^* và các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0$, $i = 0,\dots,m$, không cùng triệt tiêu, sao cho*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2,$$

$$0 \in \mu_0(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \partial g_i(x^*) + N(x^*|S) \tag{2.4.12}$$

và

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } i = 1,\dots,m, \tag{2.4.13}$$

trong đó $\partial g_i(x^*) := \{\xi \in I\!R^n \mid g_i(x) - g_i(x^*) \geq \langle \xi, x - x^*\rangle\}$ là dưới vi phân của g_i tại x^* và $N(x^*|S) := \{\xi \in I\!R^n \mid \langle \xi, x - x^*\rangle \leq 0\}$ là nón pháp tuyến của S tại x^*.
Nếu điều kiện Slater thỏa mãn thì $\mu_0 \neq 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$.

(b) *Nếu tồn tại $x^* \in D$ thỏa mãn (2.4.12), (2.4.13) với $\mu_0 = 1$ thì tồn tại $\tilde{x}^* \in D$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ thỏa mãn*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2$$

và mọi điểm infimum toàn cục khác của $\tilde{f} = f + p$ trên D nằm trong hình cầu $\overline{B}(x^*, \gamma^*/2)$.

Cho

$$D = \{x \in I\!R^n \mid \langle c_i, x\rangle \leq d_i,\ i = 1,\dots,m\}. \tag{2.4.14}$$

Ta có định lý sau:

Định lý 2.4.16. *Giả sử D được xác định theo công thức (2.4.14).*

(a) *Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, thì tồn tại duy nhất $x^* \in D$ và các nhân tử Lagrange $\mu_i \geq 0$, $i = 1,\dots,m$, sao cho*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2,$$

$$(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i = 0, \tag{2.4.15}$$

và

$$\mu_i(\langle c_i, x^*\rangle - d_i) = 0 \text{ với mọi } i = 1,\dots,m. \tag{2.4.16}$$

(b) *Nếu có $x^* \in D$ thỏa mãn* (2.4.15), (2.4.16) *thì tồn tại $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ thỏa mãn*

$$\|\tilde{x}^* - x^*\| \leq \gamma^*/2$$

và

$$\|2A\tilde{x}^* + b + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i\| \leq \lambda_{\max}\gamma^*.$$

Định lý này còn được H. X. Phu chỉ ra thêm:

Với $1 \leq i \leq m$, nếu $\langle c_i, \tilde{x}^* \rangle < d_i - (2s/\lambda_{\min})^{1/2}\|c_i\|$ thì

$$\mu_i = 0.$$

Kết luận: Trong chương này chúng tôi đã chỉ ra: tính γ-lồi ngoài của hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ (Mệnh đề 2.1.11); điều kiện tồn tại điểm cực tiểu toàn cục và infimum toàn cục (Mệnh đề 2.2.14); xác lập đường kính của tập các điểm cực tiểu toàn cục, điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ không vượt quá γ^* (các mệnh đề 2.2.15–2.3.16); tính ổn định nghiệm của Bài toán $(\tilde{P})$ (Định lý 2.3.13); Định lý Kuhn-Tucker cho Bài toán $(\tilde{P})$ (các định lý 2.4.14–2.4.16).

CHƯƠNG 3
TÍNH Γ-LỒI NGOÀI CỦA HÀM BỊ NHIỄU VÀ ĐIỂM INFIMUM TOÀN CỤC CỦA BÀI TOÁN $(\tilde{P})$

Trong chương này, bằng tiếp cận mới thông qua hàm Γ-lồi ngoài, chúng tôi nghiên cứu các tính chất của hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$; quan hệ giữa các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$; tính ổn định của tập các điểm infimum toàn cục; điều kiện tồn tại nghiệm của Bài toán $(\tilde{P})$.

3.1. Tính Γ-lồi ngoài của hàm bị nhiễu giới nội

Định nghĩa 3.1.9. *Cho f thỏa mãn công thức* (1.0.1). *Hàm $h_1(.,z)$ theo hướng z được định nghĩa như sau:*

$$h_1(\mu, z) := \inf_{x \in I\!R^n} \Big(\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x+\mu z) - f(x + \frac{1}{2}\mu z)\Big), \qquad (3.1.17)$$

trong đó $\mu \in I\!R$ và $z \in I\!R^n$.

Ta ký hiệu

$$m(\gamma, z) := \inf\{\mu \mid h_1(\mu, z) > \gamma\} \tag{3.1.18}$$

và

$$M(\gamma) := \{tz \mid z \in I\!R^n, |t| \leq m(\gamma, z)\}. \tag{3.1.19}$$

Bổ đề sau cho ta các giá trị của $h_1(\mu, z)$, $m(\gamma, z)$ và các tính chất của tập $M(\gamma)$.

Bổ đề 3.1.3. *Với mọi $z \in I\!R^n$ và $z \neq 0$, ta có*

(a) $h_1(\mu, z) = \frac{\mu^2}{4}\langle Az, z\rangle$.

(b) $m(\gamma, z) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{\langle Az,z\rangle}}$.

(c) $M(\gamma) = \{x \mid x \in I\!R^n,\ x^T Ax \leq 4\gamma\}$.

(d) *$M(\gamma)$ là tập lồi, đóng và cân.*

(e) *$0 \in M(\gamma)$ là điểm trong của tập $M(\gamma)$.*

Nghiên cứu tính Γ-lồi ngoài của hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ ta có các mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.1.18. *Cho f thỏa mãn công thức* (1.0.1), *$\gamma > 0$ và $\Gamma = M(\gamma)$. Khi đó hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ là Γ-lồi ngoài nếu*

$$|p(x)| \leq \gamma/2 \text{ với mọi } x \in D.$$

Khi p thỏa mãn (1.0.2), ta có mệnh đề quan trọng sau:

Mệnh đề 3.1.19. *Hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ là Γ-lồi ngoài với $\Gamma = M(2s)$.*

Áp dụng mệnh đề trên và định lý về tập mức dưới của hàm Γ-lồi ngoài, ta nhận được mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.1.20. *Tập mức dưới của hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$ là Γ-lồi ngoài, với $\Gamma = M(2s)$.*

3.2. Điểm infimum toàn cục của bài toán nhiễu

Một tính chất quan trọng của hàm lồi là cực tiểu địa phương là cực tiểu toàn cục. Đối với hàm Γ-lồi ngoài ta có tính chất gần giống sau:

Mệnh đề 3.2.21. *Cho $\Gamma = M(2s)$ nếu $x^* \in D$ là điểm Γ-cực tiểu của hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$, thì x^* là điểm cực tiểu toàn cục của $\tilde{f} = f + p$.*

Ngoài ra, H. X. Phu còn chỉ ra định lý sau:

Định lý 3.2.17. *Cho $\Gamma = M(2s)$ và $x^* \in D$ là điểm Γ-infimum của hàm bị nhiễu giới nội $\tilde{f} = f + p$. Khi đó x^* là điểm infimum toàn cục của $\tilde{f} = f + p$.*

Nghiên cứu hiệu của các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 3.2.22. *Nếu $\tilde{x}_1^*$, $\tilde{x}_2^*$ là hai điểm infimum toàn cục bất kỳ của Bài toán $(\tilde{P})$ thì*

$$\tilde{x}_1^* - \tilde{x}_2^* \in M(2s).$$

3.3. Tính ổn định của tập các điểm infimum toàn cục

Trong mục này, chúng tôi khảo sát tính ổn định của tập các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Các kết quả thu được trong mục này là các định lý sau:

Định lý 3.3.18. *Nếu x^* là điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán (P), $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Khi đó*

$$\tilde{x}^* \in x^* + 0.5M(2s). \tag{3.3.20}$$

Kết quả nhận được ở các mục trên là mạnh hơn các kết quả tương tự ở Chương 2.

Gọi S_0 là tập các điểm cực tiểu của Bài toán (P) và S_s là tập các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$. Khoảng cách Hausdorff là đại lượng sau:

$$d_H(S_0, S_s) = \max\{\sup_{x\in S_0} \inf_{y\in S_s} \|x-y\|, \sup_{y\in S_s} \inf_{x\in S_0} \|x-y\|\}.$$

H. X. Phu đã chỉ ra định lý sau:

Định lý 3.3.19. *Giả sử Bài toán (P) có điểm cực tiểu x^* và*

$$(x^* + \bar{B}(0,r)) \cap D \text{ là đóng với giá trị } r > 0 \text{ nào đó .}$$

Nếu

$$\sup_{x\in D}|p(x)| \le s \le \frac{1}{2}r^2\lambda_{\min},$$

thì tập S_s là khác rỗng và

$$d_H(\{x^*\}, S_s) \le \sqrt{2s/\lambda_{\min}}\,.$$

3.4. Dưới vi phân suy rộng thô và điều kiện tối ưu

Trong mục 2.4 Chương 2, chúng tôi đã trình bày tính chất tựa và điều kiện tối ưu của Bài toán $(\tilde{P})$. Ở mục này ta xét lại các tính chất trên và nhận được các kết quả mạnh hơn các kết quả trước đó.

Định nghĩa 3.4.10. (H. X. Phu) *Cho tập cân Γ ta nói ξ là dưới vi phân suy rộng thô của hàm $g : D \to I\!R$ tại điểm $x^* \in D$ nếu*

$$\inf_{x'\in(x^*+\Gamma)\cap D}\big(g(x') + \langle\xi, x'\rangle\big) \le g(x) + \langle\xi, x\rangle \text{ với mọi } x \in D.$$

Khi $g = \tilde{f} = f + p$ ta có định lý sau:

Định lý 3.4.20. *Giả sử $0 < \sup_{x\in D}|p(x)| \le s < +\infty$, $f(x) = \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$. Khi đó, với $x^* \in D$ nào đó thì*

$$\inf_{x'\in(x^*+0.5M(2s))\cap D}\big(\tilde{f}(x') - \langle 2Ax^*+b, x'\rangle\big) \le \tilde{f}(x) - \langle 2Ax^*+b, x\rangle \text{ với mọi } x \in D.$$

Trong trường hợp đặc biệt, nếu D đóng và p là nửa liên tục dưới, thì với mỗi $x^* \in D$ tồn tại

$$\tilde{x}^* \in \big(x^* + 0.5M(2s)\big) \cap D$$

sao cho

$$\tilde{f}(\tilde{x}^*) - \langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^*\rangle = \min_{x'\in(x^*+0.5M(2s))\cap D}\big(\tilde{f}(x') - \langle 2Ax^* + b, x'\rangle\big)$$

và

$$\tilde{f}(\tilde{x}^*) - \langle 2Ax^* + b, \tilde{x}^*\rangle \le \tilde{f}(x) - \langle 2Ax^* + b, x\rangle \text{ với mọi } x \in D,$$

hoặc tương đương là

$$\tilde{f}(x) \ge \tilde{f}(\tilde{x}^*) + \langle 2Ax^* + b, x - \tilde{x}^*\rangle \text{ với mọi } x \in D.$$

H. X. Phu đã chỉ ra định lý này.

Nghiên cứu sự tồn tại điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$, ta có Định lý Kuhn-Tucker suy rộng như sau:

Định lý 3.4.21. *Xét bài toán $(\tilde{P})$ với miền D được cho bởi* (2.4.8). *Khi đó*

(a) *Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục, thì tồn tại duy nhất $x^* \in (\tilde{x}^* + 0.5M(2s)) \cap D$ và các nhân tử Lagrange $\mu_0 \geq 0, \mu_1 \geq 0, \ldots \mu_m \geq 0$, sao cho chúng không cùng triệt tiêu, thỏa mãn điều kiện Kuhn-Tucker*

$$\mathcal{L}(x^*, \mu_0, \ldots, \mu_m) = \min_{x \in S} \mathcal{L}(x, \mu_0, \ldots, \mu_m), \tag{3.4.21}$$

điều kiện bù

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m. \tag{3.4.22}$$

Nếu điều kiện Slater (2.4.11) *thỏa mãn thì $\mu_0 \neq 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$.*

(b) *Nếu tồn tại x^* thỏa mãn* (3.4.21) *và* (3.4.22) *với $\mu_0 = 1$ thì tồn tại $\tilde{x}^* \in (x^* + 0.5M(2s)) \cap D$ là infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$.*

Mở rộng Định lý 2.4.15 là định lý sau:

Định lý 3.4.22. *Giả sử D được cho bởi công thức* (2.4.8), *$g_i : I\!R^n \to R$, $i = 1, \ldots, m$, là các hàm lồi, cùng liên tục ít nhất tại một điểm của tập lồi, đóng $S \subset I\!R^n$. Khi đó*

(a) *Nếu $\tilde{x}^*$ là điểm infimum toàn cục của bài toán $(\tilde{P})$ thì tồn tại duy nhất $x^* \in (\tilde{x}^* + 0.5M(2s)) \cap D$ và các nhân tử Lagrange $\mu_0 \geq 0, \mu_1 \geq 0, \ldots, \mu_m \geq 0$, chúng không cùng triệt tiêu thỏa mãn*

$$0 \in \mu_0(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \partial g_i(x^*) + N(x^*|S) \tag{3.4.23}$$

và

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m, \tag{3.4.24}$$

trong đó $N(x^*|S)$ là nón pháp tuyến của S tại x^*.
Nếu điều kiện Slater (2.4.11) *thỏa mãn thì $\mu_0 \neq 0$ và có thể coi $\mu_0 = 1$.*

(b) *Nếu có* $x^* \in D$ *thỏa mãn* (3.4.23) *và* (3.4.24) *với* $\mu_0 = 1$ *thì tồn tại* $\tilde{x}^* \in (x^* + 0.5M(2s)) \cap D$ *là điểm infimum toàn cục duy nhất của Bài toán* $(\tilde{P})$.

Khi D là tập lồi đa diện ta có định lý sau:

Định lý 3.4.23. *Giả sử* D *được cho bởi* (2.4.14). *Khi đó*

(a) *Nếu* $\tilde{x}^*$ *là điểm infimum toàn cục của Bài toán* $(\tilde{P})$ *thì tồn tại duy nhất* $x^* \in (\tilde{x}^* + 0.5M(2s)) \cap D$ *và các nhân tử Lagrange* $\mu_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$, *sao cho*

$$(2Ax^* + b) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i = 0, \tag{3.4.25}$$

$$\mu_i(\langle c_i, x^* \rangle - d_i) = 0 \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m. \tag{3.4.26}$$

Hơn thế nữa ta có

$$2A\tilde{x}^* + b + \sum_{i=1}^{m} \mu_i c_i \in AM(2s).$$

(b) *Nếu có* $x^* \in D$ *thỏa mãn* (3.4.25), (3.4.26) *thì tồn tại* $\tilde{x}^* \in (x^* + 0.5M(2s)) \cap D$ *là điểm infimum toàn cục của Bài toán* $(\tilde{P})$.

Kết luận: Bằng cách tiếp cận tô pô chúng tôi đã chỉ ra: tính Γ-lồi ngoài của hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ (các Mệnh đề 3.1.18–3.2.21); tập $M(2s)$ chứa hiệu các điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ (Mệnh đề 3.2.22); quan hệ giữa điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán (P) và điểm infimum toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$; tính ổn định nghiệm theo khoảng cách Hausdorff (các định lý 3.3.18–3.4.20); điều kiện tối ưu của Bài toán $(\tilde{P})$ (các định lý 3.4.21–3.4.23).

CHƯƠNG 4
ĐIỂM SUPREMUM CỦA BÀI TOÁN $(\tilde{Q})$

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu: tính γ-lồi trong của hàm $\tilde{f} = f + p$; tính ổn định, tính liên tục của hàm tập các điểm supremum toàn cục; tính ổn định, tính liên tục của hàm tập các điểm supremum địa phương của Bài toán $(\tilde{Q})$ theo nhiễu p.

4.1. Tính γ-lồi trong của hàm bị nhiễu

Nghiên cứu hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ ta có các mệnh đề sau:

Mệnh đề 4.1.23. *Cho* $\gamma > 0$, f *xác định theo công thức* (1.0.1). *Khi đó*

(a) *Nếu* $\sup_{x\in D} |p(x)| \le \lambda_{\min}\gamma^2/2$, *thì* $\tilde{f} = f + p$ *là* γ*-lồi trong.*

(a) *Nếu* $\sup_{x\in D} |p(x)| < \lambda_{\min}\gamma^2/2$, *thì* $\tilde{f} = f + p$ *là* γ*-lồi trong ngặt.*

Áp dụng Mệnh đề 4.1.23 và tính chất của hàm p ta có được mệnh đề quan trọng sau:

Mệnh đề 4.1.24. *Cho* f *xác định theo công thức* (1.0.1) *và* p *thỏa mãn* (1.0.2). *Khi đó hàm bị nhiễu* $\tilde{f} = f + p$ *là* γ*-lồi trong với* $\gamma \ge \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ *và* γ*-lồi trong ngặt với* $\gamma > \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$.

4.2. Điểm supremum toàn cục của hàm bị nhiễu

Mệnh đề 4.2.25. *Nếu hàm bị nhiễu giới nội* $\tilde{f} = f + p$ *đạt giá trị cực đại, thì nó chỉ đạt cực đại toàn cục tại một số điểm* γ*-cực biên nào đó của* D*, với* $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$.

Định nghĩa 4.2.11. (H. X. Phu) $x^* \in D$ *được gọi là điểm supremum toàn cục của* $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nếu*

$$\limsup_{y\to x^*,\ y\in D} g(y) \ge g(x) \text{ với mọi } x \in D.$$

Định nghĩa 4.2.12. $x^* \in D$ *được gọi là điểm supremum địa phương của* $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *nếu*

$$\exists \delta > 0 : \limsup_{y\to x^*,\ y\in D} g(y) \ge g(x) \text{ với mọi } x \in \bar{B}(x^*, \delta) \cap D.$$

Mệnh đề 4.2.28. *Cho* x_1 *là điểm supremum toàn cục của hàm toàn phương lồi ngặt bị nhiễu giới nội* $\tilde{f} = f + p$*, trong đó* $\sup_{x\in D} |p(x)| \le s < +\infty$. *Nếu* $x_0 \in D$ *và* $-x_0 + 2x_1$ *thỏa mãn*

$$\|x_0 - x_1\| = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}, -x_0 + 2x_1 \in D$$

thì x_0 *và* $-x_0 + 2x_1$ *cũng là các điểm supremum toàn cục của* $\tilde{f} = f + p$.

4.3. Tính chất của tập các điểm supremum toàn cục

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu quan hệ giữa tập các điểm supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$ với tập các điểm supremum toàn cục của Bài toán (Q), khi

$$D := \{x \in I\!R^n \mid \langle c_i, x\rangle \le d_i,\ c_i \in I\!R^n,\ i = 1, \dots, m\}.$$

Gọi

$$\begin{aligned} \operatorname{ext} D &:= \{x^* \mid x^* \text{ là điểm cực biên của tập lồi đa diện } D\}. \\ D(x^*, \beta) &:= \{x \in D \mid x = (1-\alpha)x^* + \alpha y,\ y \in D, \\ &\quad\ 0 \le \alpha \le 1 - \beta\},\ x^* \in \operatorname{ext} D, \beta \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 4.3.5. *Cho $D \subset I\!R^n$ là đa diện lồi, khi đó*

(a) *Tồn tại $\beta_0 > 0$ để với mọi $\beta \in [0, \beta_0]$ ta có*

$$D = \bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} D(x^*, \beta).$$

(b) *Tồn tại $\gamma_0 > 0$ sao cho với mọi $\gamma \in [0, \gamma_0]$ tập các điểm γ-cực biên của miền D nằm trong tập*

$$\bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} \bar{B}(x^*, \gamma) \cap D.$$

(c) *Tồn tại $s_0 > 0$ sao cho với mọi $s \in [0, s_0]$ tập các điểm γ-cực biên của D với $\gamma = \sqrt{2s/\lambda_{\min}}$ nằm trong tập*

$$\bigcup_{x^* \in \operatorname{ext} D} \bar{B}(x^*, \sqrt{2s/\lambda_{\min}}\,) \cap D.$$

Ký hiệu

$$C^0(D) := \{p : D \to I\!R \mid \sup_{x \in D} |p(x)| < +\infty\}.$$

Nếu trang bị chuẩn $\|p\|_{C^0(D)} := \sup_{x\in D} |p(x)|$ thì $C^0(D)$ là không gian tuyến tính định chuẩn với các phép toán cộng hàm số và nhân hàm số với số thực. Gọi $S_{global}(p)$ là tập các điểm supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$, khi đó $S_{global} : C^0(D) \rightrightarrows I\!R^n$ và dễ thấy $S_{global}(0)$ là tập các điểm cực đại toàn cục của Bài toán (P).

Định lý 4.3.24. *Xét Bài toán* $(\tilde{Q})$. *Khi đó*

$$\exists s_0 > 0\ \forall p \in \bar{B}(0, s_0) : S_{global}(p) \subseteq S_{global}(0) + \sqrt{2\|p\|_{C^0}/\lambda_{\min}}\,\bar{B}(0,1). \tag{4.3.27}$$

Mệnh đề 4.3.29. *Xét Bài toán* $(\tilde{Q})$. *Khi đó* $S_{global}(p)$ *là hàm nửa liên tục trên tại* 0.

4.4. Tính chất của tập các điểm supremum địa phương

Gọi $S_{local}(p)$ là tập các điểm supremum địa phương của Bài toán $(\tilde{Q})$ khi đó $S_{local} : C^0(D) \rightrightarrows I\!R^n$.

Ký hiệu

$$\eta(x^*) := \sup_{x \in D,\ x \neq x^*} \Big\langle 2Ax^* + b, \frac{x - x^*}{\|x - x^*\|} \Big\rangle.$$

Bổ đề 4.4.7. *Đặt* $\eta_0 := \max_{x^* \in S_{local}(0)} \eta(x^*)$. *Khi đó* $\eta_0 < 0$.

Bổ đề 4.4.8. *Với mỗi* $s \in [0, s_0]$ *thì*

$$\forall x^* \in S_{local}(0), \forall x \in D : \|x - x^*\| = \xi(s) \Longrightarrow f(x) \leq f(x^*) - 3s.$$

Định lý 4.4.25. *Xét Bài toán* $(\tilde{Q})$. *Khi đó*

$$\forall p \in \bar{B}_{C^0}(0, s_0) : \max_{x^* \in S_{local}(0)} d\big(x^*, S_{local}(p)\big) \leq \xi(\|p\|_{C^0}).$$

Mệnh đề 4.4.30. *Hàm đa trị* $S_{local}(p)$ *là nửa liên tục dưới tại điểm* 0.

Kết luận: Chương này chúng tôi đã chỉ ra: tính γ-lồi trong của hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ (Mệnh đề 4.1.24); các tính chất của các điểm cực đại và supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$ (các mệnh đề 4.2.25, 4.2.28); tính ổn định, nửa liên tục trên của hàm tập các điểm supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$ (Định lý 4.3.24 và Mệnh đề 4.3.29); tính ổn định, nửa liên tục dưới của hàm tập các điểm supremum địa phương của Bài toán $(\tilde{Q})$ (Định lý 4.4.25 và Mệnh đề 4.4.30).

KẾT LUẬN CHUNG

1. Luận án đã giải quyết được các vấn đề:

- Chỉ ra hàm bị nhiễu $\tilde{f} = f + p$ là γ-lồi ngoài với mọi $\gamma \geq \gamma^*$, trong đó $\gamma^* = 2\sqrt{2s/\lambda_{\min}}$; điểm γ^*-cực tiểu của $\tilde{f}$ là điểm cực tiểu toàn cục; xác lập đường kính của tập các điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ nhỏ hơn hoặc bằng γ^*; khoảng cách giữa điểm cực tiểu toàn cục của Bài toán $(\tilde{P})$ và điểm cực tiểu toàn cục của hàm f nhỏ hơn hoặc bằng γ^*. Ngoài ra tính chất tựa thô và một số điều kiện tối ưu suy rộng của hàm $\tilde{f}$ cũng được trình bày. Các kết quả trên đã được công bố trong bài báo [1].

- Chứng minh được, hàm $\tilde{f}$ là Γ-lồi ngoài với tập cân đặc biệt $\Gamma \subset I\!R^n$; điểm Γ-tối ưu địa phương của Bài toán $(\tilde{P})$ là điểm tối ưu toàn cục; hiệu của hai nghiệm tối ưu bất kỳ của Bài toán $(\tilde{P})$ nằm trong tập Γ; $x^* - \tilde{x}^* \in \frac{1}{2}\Gamma$ nếu x^* là nghiệm cực tiểu toàn cục của f trên D và $\tilde{x}^*$ là nghiệm tối ưu toàn cục bất kỳ của Bài toán $(\tilde{P})$; tập nghiệm tối ưu S_s của $(\tilde{P})$ là ổn định theo khoảng cách Hausdorff $d_H(.,.)$. Định lý Kuhn-Tucker suy rộng cho Bài toán $(\tilde{P})$ cũng được chứng minh. Các kết quả trên đã được đăng tải trong bài báo [2].

- Chỉ ra hàm $\tilde{f}$ là γ-lồi trong với $\gamma \geq (2/\lambda_{\min})^{\frac{1}{2}}$ và γ-lồi trong ngặt với $\gamma > (2/\lambda_{\min})^{\frac{1}{2}}$; khi D bị chặn và $\gamma = (2/\lambda_{\min})^{\frac{1}{2}}$, mọi điểm supremum toàn cục của Bài toán $(\tilde{Q})$ chỉ có thể là điểm γ- cực biên của D và có ít nhất một điểm là γ-cực biên ngặt. Một số tính chất quan trọng của tập các điểm supremum toàn cục $S_{global}(p)$ và tập các điểm supremum địa phương $S_{local}(p)$ của Bài toán $(\tilde{Q})$ như tính ổn định và tính nửa liên tục cũng được chỉ ra. Phần lớn các kết quả được liệt kê ở trên đã được công bố trong bài báo [3].

2. Những vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu:

Luận án chỉ mới đề cập đến một số vấn đề về lý thuyết của Bài toán quy hoạch toàn phương lồi ngặt với nhiễu giới nội. Do đó chúng tôi còn tiếp tục nghiên cứu những vấn đề sau đây.

- Xây dựng thuật toán tính toán tìm lời giải tối ưu của các bài toán $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$.

- Áp dụng thuật tìm lời giải tối ưu của các bài toán $(\tilde{P})$ và $(\tilde{Q})$ vào các bài toán thực tế như bài toán phát điện tối ưu, kinh tế đối sánh,. . .

CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. H. X. Phu and V. M. Pho, *Global infimum of strictly convex quadratic functions with bounded perturbation,* Mathematical Methods of Operations Research, **72(2)**, 2010, 327–345.

2. H. X. Phu and V. M. Pho, *Some properties of boundedly disturbed strictly convex quadratic functions,* Optimization, DOI 10.1080/023319-3100746114, Published online: 07 May 2010.

3. H. X. Phu, V. M. Pho and P. T. An, *Maximizing Strictly Convex Quadratic Functions with Bounded Perturbation,* Journal of Optimization Theory and Applications, **149(1), 2011, 1–25.**

MỘT SỐ KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI

1. Xe mi na “Tối ưu hóa và Tính toán hiện đại” của Khoa Công nghệ thông tin Học viện KTQS,

2. Xe mi na “Tối ưu và Tính toán khoa học” của Phòng Giải tích số và Tính toán khoa học Viện Toán học,

3. Hội thảo “Tối ưu và Tính toán Khoa học” tại Ba vì, Hà nội, tháng 4 năm 2010,

4. Xe mi na “Tính toán hiện đại” của Bộ môn Toán, Khoa Công nghệ thông tin Học viện KTQS,

5. Hội thảo “Tối ưu và Tính toán Khoa học” tại Ba vì, Hà nội, tháng 4 năm 2011.