BỘ QUỐC PHÒNG
HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ

*

ĐÀO TRỌNG QUYẾT

MỘT SỐ NGHIÊN CỨU VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH g-NAVIER-STOKES HAI CHIỀU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 62. 46. 01. 12

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2013

Công trình được hoàn thành tại Học viện Kỹ thuật Quân sự.

Người hướng dẫn khoa học: TS. Cung Thế Anh

Phản biện 1: GS.TS. Đặng Quang Á, Viện Công nghệ thông tin, Viện HLKH Việt Nam.
Phản biện 2: PGS.TSKH. Nguyễn Minh Trí, Viện Toán học, Viện HLKH Việt Nam.
Phản biện 3: PGS.TS. Hoàng Quốc Toàn, Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Học viện họp tại Học viện Kỹ thuật Quân sự vào hồi ..... giờ ..... ngày ..... tháng ..... năm 2013.

Có thể tìm hiểu luận án tại Thư viện Quốc gia, Thư viện Học viện Kỹ thuật Quân sự.

MỞ ĐẦU

1. LỊCH SỬ VẤN ĐỀ VÀ LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Hệ phương trình Navier-Stokes miêu tả dòng chảy của chất lỏng lí tưởng, nhớt, không nén và có dạng sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &= f,\\ \nabla\cdot u &= 0, \end{cases}$$

ở đó $u = u(x,t), p = p(x,t)$ tương ứng là hàm véctơ vận tốc và hàm áp suất cần tìm, $\nu = \text{const} > 0$ là hệ số nhớt và f là ngoại lực.

Mặc dù được đưa ra lần đầu tiên vào năm 1822, cho đến nay đã có nhiều bài báo và sách chuyên khảo viết về hệ Navier-Stokes, tuy nhiên vấn đề tồn tại nghiệm mạnh toàn cục và tính duy nhất của nghiệm yếu trong trường hợp ba chiều vẫn là thách thức lớn đối với các nhà toán học cũng như vật lí. Vì nhu cầu của Khoa học và Công nghệ mà việc nghiên cứu hệ Navier-Stokes nói riêng và các phương trình, hệ phương trình trong cơ học chất lỏng nói chung ngày càng trở nên thời sự và cấp thiết. Như được đề cập đến trong các cuốn chuyên khảo của R. Temam (1979, 1995) và các bài báo tổng quan gần đây của C. Bardos & B. Nicolaenko (2002) và R. Temam (2000), những vấn đề cơ bản đặt ra khi nghiên cứu các phương trình và hệ phương trình trong cơ học chất lỏng là:

- *Sự tồn tại, tính duy nhất và tính chính qui của nghiệm*: Nghiệm ở đây có thể là nghiệm yếu hoặc nghiệm mạnh. Tính chính qui ở đây có thể là tính chính qui theo biến thời gian hoặc tính chính qui theo biến không gian.

- *Dáng điệu tiệm cận của nghiệm*: Nghiên cứu dáng điệu của nghiệm khi thời gian t ra vô cùng bằng các công cụ của lí thuyết hệ động lực.

- *Xấp xỉ nghiệm*: Nói chung ta không thể tìm được nghiệm chính xác của phương trình, mặc dù nó tồn tại, do đó vấn đề tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán cần được quan tâm nghiên cứu và có nhiều ứng dụng trong thực tế.

- *Bài toán điều khiển được và bài toán điều khiển tối ưu.*

Trong những năm gần đây, lớp hệ phương trình g-Navier-Stokes, được đưa ra lần đầu tiên bởi Roh năm 2001, có dạng:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p & = f, \\ \nabla \cdot (gu) & = 0. \end{cases} \tag{1}$$

ở đó $g = g(x)$ là một hàm số dương cho trước, cũng thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học bởi ý nghĩa và tầm quan trọng của chúng, cũng như những khó khăn thách thức về mặt toán học khi nghiên cứu.

Như được đề cập bởi J. Roh, có hai lí do chính dẫn đến việc nghiên cứu hệ phương trình g-Navier-Stokes, đặc biệt là trong trường hợp hai chiều:

1) Hệ g-Navier-Stokes hai chiều xuất hiện một cách tự nhiên khi nghiên cứu hệ Navier-Stokes trong miền mỏng ba chiều $\Omega_g = \Omega \times (0, g)$, ở đó Ω là miền hai chiều, và các tính chất tốt của hệ g-Navier-Stokes hai chiều sẽ giúp ích cho việc nghiên cứu hệ Navier-Stokes trong miền mỏng ba chiều.

2) Về mặt toán học, hệ phương trình này là một dạng tổng quát của hệ Navier-Stokes cổ điển. Vì vậy nếu có một kết quả đối với lớp hệ phương trình này, thì chỉ cần cho $g = 1$, ta sẽ nhận được kết quả tương ứng đối với hệ Navier-Stokes. Ngược lại, việc chuyển những kết quả đã biết đối với hệ phương trình Navier-Stokes cho hệ phương trình g-Navier-Stokes đặt ra những vấn đề toán học lí thú.

Do đó trong những năm gần đây, hệ phương trình g-Navier-Stokes đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu, chẳng hạn Friz et. al. (2012), Jiang và Hou (2009, 2010, 2011), Kaya và Celebi (2009), Kwean (2012), Kwean-Kwak-Roh (2006), Kwean và Roh (2005), Roh (2005, 2006, 2009), Wu (2009, 2010), Wu và Tao (2012). Tuy nhiên, vẫn còn nhiều vấn đề mở liên quan đến hệ g-Navier-Stokes cần được nghiên cứu, chẳng hạn:

- Nghiên cứu sự tồn tại và dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi ngoại lực f phụ thuộc thời gian t, có thể chứa trễ và miền xét phương trình không nhất thiết bị chặn.

- Nghiên cứu sự tồn tại và dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh của hệ g-Navier-Stokes.

- Xấp xỉ trong khoảng thời gian hữu hạn và xấp xỉ dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình g-Navier-Stokes.

Xuất phát từ những lí do trên, chúng tôi chọn những vấn đề trên làm đề tài nghiên cứu của luận án **"Một số nghiên cứu về hệ phương trình g-Navier-Stokes hai chiều"**.

2. MỤC ĐÍCH, ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu các nội dung sau về hệ phương trình g-Navier-Stokes hai chiều:
- *Nội dung 1.* Nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất và dáng điệu tiệm cận của **nghiệm yếu** của hệ g-Navier-Stokes hai chiều.
- *Nội dung 2.* Nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất, dáng điệu tiệm cận và xấp xỉ **nghiệm mạnh** của hệ g-Navier-Stokes hai chiều.
- *Nội dung 3.* Nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất và dáng điệu tiệm cận của **nghiệm yếu** của hệ g-Navier-Stokes khi ngoại lực phụ thuộc **trễ vô hạn**.

3. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Để nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm, chúng tôi sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin, các bổ đề compact, thiết lập các bổ đề xử lí số hạng phi tuyến và số hạng chứa trễ. Để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm, chúng tôi sử dụng lí thuyết hệ động lực vô hạn chiều. Để xấp xỉ nghiệm, chúng tôi sử dụng các phương pháp của Giải tích số và Tính toán khoa học.

4. KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây:

- Chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu đối với bài toán (1). Chứng minh được sự tồn tại và đánh giá số chiều fractal của tập hút lùi, sự tồn tại duy nhất và tính ổn định của nghiệm dừng yếu.
- Chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm mạnh đối với bài toán (1). Chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục và tính ổn định của nghiệm dừng mạnh. Chứng minh được các kết quả về xấp xỉ nghiệm mạnh trong khoảng thời gian hữu hạn và xấp xỉ dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh.
- Chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán (1) trong trường hợp ngoại lực phụ thuộc trễ vô hạn; sự tồn tại duy nhất và tính ổn định của nghiệm dừng yếu.

5. CẤU TRÚC CỦA LUẬN ÁN

Luận án gồm 4 chương: Chương 1 nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị; Chương 2 trình bày các kết quả về nghiệm yếu của hệ g-Navier-Stokes hai chiều; Chương 3 trình bày các kết quả về nghiệm mạnh; Chương 4 trình bày các kết quả về nghiệm yếu của hệ g-Navier-Stokes hai chiều với trễ vô hạn.

Chương 1
MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các không gian hàm cần dùng để nghiên cứu hệ g-Navier-Stokes và thiết lập các đánh giá cần thiết để xử lí số hạng phi tuyến. Chúng tôi cũng nhắc lại các kết quả tổng quát về lí thuyết tập hút (tập hút toàn cục, tập hút lùi) và một số kết quả bổ trợ được dùng trong các chương sau.

1.1. CÁC KHÔNG GIAN HÀM, TOÁN TỬ VÀ BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN ĐẾN SỐ HẠNG PHI TUYẾN

1.1.1. Các không gian hàm

Kí hiệu $L^2(\Omega, g) = (L^2(\Omega))^2$ và $H_0^1(\Omega, g) = (H_0^1(\Omega))^2$ với tích vô hướng lần lượt là

$$(u, v)_g = \int_\Omega u \cdot v g dx,\ u, v \in L^2(\Omega, g),$$

$$((u, v))_g = \int_\Omega \sum_{j=1}^{2} \nabla u_j \cdot \nabla v_j g dx,\ u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega, g),$$

và chuẩn tương ứng $|u|^2 = (u, u)_g,\ ||u||^2 = ((u, u))_g$.

Đặt $\mathcal{V} = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^2 : \nabla \cdot (gu) = 0\}$. Kí hiệu H_g là bao đóng của $\mathcal{V}$ trong $L^2(\Omega, g)$, và V_g là bao đóng của $\mathcal{V}$ trong $H_0^1(\Omega, g)$. Dễ thấy $V_g \subset H_g \equiv H_g' \subset V_g'$, trong đó các phép nhúng trù mật và liên tục. Ta dùng kí hiệu $||\cdot||_*$ cho chuẩn trong V_g', và $\langle ., . \rangle$ chỉ đối ngẫu giữa V_g và V_g'.

1.1.2. Các toán tử

Ta định nghĩa các toán tử liên quan đến hệ g-Navier-Stokes.

Đặt $A : V_g \to V_g'$ là toán tử xác định bởi $\langle Au, v \rangle = ((u, v))_g$. Kí hiệu $D(A) = \{u \in V_g : Au \in H_g\}$, thì $D(A) = H^2(\Omega, g) \cap V_g$

nếu miền Ω trơn và $Au = -P_g\Delta u, \forall u \in D(A)$, trong đó P_g là toán tử chiếu trực giao từ $L^2(\Omega, g)$ xuống H_g.

Đặt $B : V_g \times V_g \to V_g'$ là toán tử xác định bởi $\langle B(u,v), w\rangle = b(u,v,w)$, trong đó

$$b(u,v,w) = \sum_{j,k=1}^{2} \int_\Omega u_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} w_k g dx.$$

Đặt $C : V_g \to H_g$ là toán tử xác định bởi

$$(Cu, v)_g = ((\frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla)u, v)_g = b(\frac{\nabla g}{g}, u, v), \forall v \in V_g.$$

1.1.3. Các bất đẳng thức liên quan đến số hạng phi tuyến

Bổ đề 1.1. *Nếu $n = 2$, thì*

$$|b(u,v,w)| \leq \begin{cases} c_1|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|v\||w|^{1/2}\|w\|^{1/2}, & \forall u, v, w \in V_g, \\ c_2|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}\|v\|^{1/2}|Av|^{1/2}|w|, & \forall u \in V_g, v \in D(A), \\ c_3|u|^{1/2}|Au|^{1/2}\|v\||w|, & \forall u \in D(A), v \in V_g, w \in H_g, \\ c_4|u|\|v\||w|^{1/2}|Aw|^{1/2}, & \forall u \in H_g, v \in V_g, w \in D(A), \end{cases}$$

trong đó $c_i, i = 1, \ldots, 4$, là các hằng số xác định.

Bổ đề 1.2. *Cho $u \in L^2(\tau, T; V_g)$. Khi đó hàm Bu xác định bởi*

$$\langle Bu(t), v\rangle = b(u(t), u(t), v), \forall u \in V_g, \text{ h.k. } t \in [\tau, T],$$

thuộc $L^2(\tau, T; V_g')$.

Bổ đề 1.3. *Cho $u \in L^2(0, T; D(A)) \cap L^\infty(0, T; V_g)$. Khi đó hàm Bu xác định bởi*

$$\langle Bu(t), v\rangle = b(u(t), u(t), v), \ \forall v \in H_g, \text{ h.k. } t \in [0, T],$$

thuộc $L^4(0, T; H_g)$, bởi vậy cũng thuộc $L^2(0, T; H_g)$.

Bổ đề 1.4. *Cho* $u \in L^2(\tau,T;V_g)$. *Khi đó hàm* Cu *xác định bởi* $(Cu(t),v)_g = ((\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla)u,v)_g = b(\frac{\nabla g}{g},u,v)$, $\forall v \in V_g$, *thuộc* $L^2(\tau,T;H_g)$, *và do đó cũng thuộc* $L^2(\tau,T;V_g')$. *Hơn nữa*

$$|Cu(t)| \leq \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}\|u(t)\|, \|Cu(t)\|_* \leq \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\|u(t)\|, \ h.k.\ t \in (\tau,T).$$

1.2. TẬP HÚT TOÀN CỤC VÀ TẬP HÚT LÙI

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại các định nghĩa và một số kết quả tổng quát về tập hút toàn cục và tập hút lùi cũng như phương pháp đánh giá số chiều fractal của chúng sẽ được sử dụng trong luận án.

1.3. MỘT SỐ KẾT QUẢ THƯỜNG DÙNG

1.3.1. Không gian hàm phụ thuộc thời gian

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại định nghĩa các không gian hàm phụ thuộc thời gian: $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $C([0,T];X)$ và $L^2_{loc}(\mathbb{R};X)$, ở đó X là một không gian Banach.

1.3.2. Một số bất đẳng thức thường dùng

Trong mục này chúng tôi nhắc lại các bất đẳng thức thường xuyên được sử dụng trong luận án: bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Young, bất đẳng thức Hölder và bất đẳng thức Gronwall.

1.3.3. Một số bổ đề và định lí quan trọng

Trong mục này chúng tôi nhắc lại một số bổ đề và định lí được sử dụng trong luận án: Bổ đề Aubin-Lions, Định lí 13.3 trong R. Temam (1995), Bổ đề 1.3 trong J.L. Lions (1969), Định lí hội tụ bị chặn Lebesgue và Định lí điểm bất động Brower.

Chương 2
NGHIỆM YẾU CỦA HỆ g-NAVIER-STOKES HAI CHIỀU

Trong chương này chúng tôi xét bài toán biên ban đầu thứ nhất đối với hệ g-Navier-Stokes hai chiều trên miền không nhất thiết bị chặn nhưng thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré. Đầu tiên chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu, sau đó chứng minh sự tồn tại và đánh giá số chiều fractal của tập hút lùi của quá trình sinh bởi bài toán. Cuối cùng, chúng tôi chứng minh sự tồn tại duy nhất và tính ổn định của nghiệm dừng yếu khi ngoại lực không phụ thuộc thời gian.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Cho Ω là miền (bị chặn hoặc không bị chặn) trong $\mathbb{R}^2$ với biên Γ. Chúng ta xét hệ g-Navier-Stokes không ô-tô-nôm sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p &= f,\ \text{trong } (\tau,+\infty)\times\Omega,\\ \nabla\cdot(gu) &= 0,\ \text{trong } (\tau,+\infty)\times\Omega,\\ u(x,t) &= 0,\ \text{trên } (\tau,+\infty)\times\Gamma,\\ u(x,\tau) &= u_0(x),\ \text{trên } \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $u = u(x,t) = (u_1,u_2)$, $p = p(x,t)$ tương ứng là hàm véctơ vận tốc và hàm áp suất cần tìm, $\nu = \text{const} > 0$ là hệ số nhớt và u_0 là vận tốc ban đầu. Để nghiên cứu bài toán (2.1) chúng ta giả thiết:

(H1) Ω là miền tùy ý (bị chặn hoặc không bị chặn) trong $\mathbb{R}^2$ thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré: Tồn tại $\lambda_1 > 0$ sao cho

$$\int_\Omega \varphi^2 g dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 g dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

(H2) $g \in W^{1,\infty}(\Omega)$ thỏa mãn

$$0 < m_0 \leq g(x) \leq M_0, \; \forall\, x = (x_1, x_2) \in \Omega, \text{ và } |\nabla g|_\infty < m_0 \lambda_1^{1/2}.$$

(H3) $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; V_g')$ sao cho

$$\int_{-\infty}^0 e^{\sigma s} \|f(s)\|^2_{V_g'} ds < +\infty,$$

trong đó σ là số dương cố định thỏa mãn $\sigma < 2\nu\lambda_1\gamma_0$ (chú ý là $\gamma_0 = 1 - \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}} > 0$).

2.2. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT CỦA NGHIỆM YẾU

Trước hết, ta định nghĩa nghiệm yếu của bài toán (2.1).

Định nghĩa 2.1. Hàm u được gọi là một nghiệm yếu của bài toán (2.1) trên khoảng (τ, T) nếu

$$\begin{cases} u \in C([\tau, T]; H_g) \cap L^2(\tau, T; V_g), \\ \dfrac{d}{dt} u(t) + \nu A u(t) + B(u(t), u(t)) + \nu C u(t) = f(t) \text{ trong } V_g', \\ u(\tau) = u_0. \end{cases}$$

với h.k. $t \in (\tau, T)$.

Sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu được trình bày ở định lí sau.

Định lí 2.1. *Giả sử các điều kiện $(H1) - (H3)$ được thỏa mãn. Khi đó, với mọi $u_0 \in H_g$, $\tau \in \mathbb{R}, T > \tau$ cho trước, bài toán* (2.1) *có duy nhất một nghiệm yếu u trên khoảng (τ, T). Nghiệm yếu này phụ thuộc liên tục vào điều kiện ban đầu u_0. Hơn nữa, ta có bất đẳng thức sau:*

$$|u(t)|^2 \le e^{-\sigma(t-\tau)}|u_0|^2 + \frac{e^{-\sigma t}}{2\epsilon\nu}\int_{-\infty}^{t} e^{\sigma s}\|f(s)\|_*^2 ds,$$

ở đó ϵ là hằng số dương thỏa mãn $\sigma = 2\nu\lambda_1(\gamma_0 - \epsilon)$.

2.3. SỰ TỒN TẠI TẬP HÚT LÙI

Từ Định lí 2.1, ta có thể định nghĩa một quá trình $U(t,\tau) : H_g \to H_g$ xác định bởi: $U(t,\tau)u_0 = u(t;\tau,u_0),\ \tau \le t, u_0 \in H_g$, trong đó $u(t) = u(t;\tau,u_0)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (2.1) với điều kiện ban đầu $u(\tau) = u_0$.

Bổ đề sau nói lên tính liên tục yếu của quá trình trên.

Bổ đề 2.1. *Cho $\{u_{0_n}\}$ là dãy phần tử trong H_g hội tụ yếu trong H_g đến phần tử $u_0 \in H_g$. Khi đó*

$$U(t,\tau)u_{0_n} \rightharpoonup U(t,\tau)u_0 \quad \text{yếu trong } H_g, \quad \text{với mọi } \tau \le t,$$

$$U(t,\tau)u_{0_n} \rightharpoonup U(t,\tau)u_0 \quad \text{yếu trong } L^2(\tau,T;V_g), \quad \text{với mọi } \tau < T.$$

Gọi $\mathcal{R}_\sigma$ là tập tất cả các hàm $r : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ thỏa mãn

$$\lim_{t\to-\infty} e^{\sigma t} r^2(t) = 0,$$

và kí hiệu $\mathcal{D}_\sigma$ là lớp tất cả các họ $\hat{\mathcal{D}} = \{D(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}(H_g)$ sao cho $D(t) \subset B(0,\hat{r}(t))$, với $\hat{r}(t) \in \mathcal{R}_\sigma$, trong đó $B(0,r)$ là kí hiệu hình cầu đóng trong H_g, tâm tại 0 và bán kính r.

Định lí sau phát biểu về sự tồn tại tập hút lùi.

Định lí 2.2. *Với các giả thiết $(H1) - (H3)$, khi đó tồn tại duy nhất tập $\mathcal{D}_\sigma$-hút lùi $\hat{\mathcal{A}} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ của quá trình $\{U(t,\tau)\}$ liên kết với bài toán (2.1).*

2.4. ĐÁNH GIÁ SỐ CHIỀU FRACTAL CỦA TẬP HÚT LÙI

Giả sử ngoại lực f thỏa mãn điều kiện:

$$f \in L^{\infty}(-\infty, T^*; V_g'), \quad \text{với } T^* \in \mathbb{R} \text{ nào đó.} \tag{2.30}$$

Ta có các bổ đề sau.

Bổ đề 2.2. *Giả sử các điều kiện* $(H1)-(H3)$ *và* (2.30) *được thỏa mãn. Khi đó tập* $\mathcal{D}_\sigma$*-hút lùi* $\hat{\mathcal{A}}$ *nhận được trong Định lí 2.2 thỏa mãn*

$$\bigcup_{\tau \le T*} A(\tau) \ \textit{compact tương đối trong } H_g.$$

Bổ đề 2.3. *Giả sử các điều kiện* $(H1)-(H3)$ *và* (2.30) *thỏa mãn. Khi đó, quá trình* $U(t,\tau)$ *tương ứng với bài toán* (2.1) *thỏa mãn tính chất tựa khả vi.*

Ta có kết quả sau về ước lượng số chiều fractal của tập hút lùi.

Định lí 2.3. *Giả sử các điều kiện* $(H1)-(H3)$ *và* (2.30) *thỏa mãn. Khi đó tập* $\mathcal{D}_\sigma$*-hút lùi* $\hat{\mathcal{A}} = \{A(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *có số chiều fractal thỏa mãn*

$$d_F(A(\tau)) \le \max\left(1, \frac{\kappa \|f\|^2_{L^\infty(-\infty,T^*;V_g')}}{16\nu^4(\gamma_0-\epsilon)^2\epsilon^2\lambda_1}\right), \ \textit{với mọi } \tau \in \mathbb{R},$$

trong đó $\gamma_0 = 1 - \frac{|\nabla g|^2_\infty}{m_0\lambda_1^2} > 0$, *và* $\epsilon > 0$ *được chọn sao cho* $\sigma = 2\nu\lambda_1(\gamma_0-\epsilon) > 0$.

2.5. MỘT SỐ KẾT QUẢ TRONG TRƯỜNG HỢP Ô-TÔ-NÔM

2.5.1. Sự tồn tại và đánh giá số chiều fractal của tập hút toàn cục

Khi ngoại lực $f \in V_g'$ không phụ thuộc t, ta có thể định nghĩa nửa nhóm liên tục $S(t) : H_g \to H_g$ bởi $S(t)u_0 = u(t)$, ở đó $u(t)$

là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (2.1) với điều kiện ban đầu u_0. Trong trường hợp này, tập hút lùi trở thành tập hút toàn cục. Bởi vậy, nửa nhóm $S(t)$ có một tập hút toàn cục compact $\mathcal{A}$ trong H_g. Hơn nữa, tập hút $\mathcal{A}$ có số chiều fractal hữu hạn.

2.5.2. Sự tồn tại duy nhất và tính ổn định của nghiệm dừng

Nghiệm dừng yếu của bài toán (2.1) là phần tử $u^* \in V_g$ sao cho

$$\nu((u^*, v))_g + \nu(Cu^*, v)_g + b(u^*, u^*, v) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in V_g.$$

Định lí 2.4. *Giả sử $f \in V_g'$. Khi đó:*

(a) Bài toán (2.1) có ít nhất một nghiệm dừng yếu u^*. Hơn nữa, nghiệm dừng này thỏa mãn:

$$\nu\left(1 - \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)||u^*|| \leq ||f||_*.$$

(b) Nếu có điều kiện sau:

$$\left[\nu\left(1 - \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)\right]^2 > \frac{c_1||f||_*}{\lambda_1^{1/2}}, \tag{2.42}$$

trong đó c_1 là hằng số trong Bổ đề 1.1, thì nghiệm dừng yếu của bài toán (2.1) là duy nhất.

Định lí 2.5. *Giả sử các điều kiện của Định lí 2.4 và (2.42) thỏa mãn. Khi đó với mọi nghiệm $u(\cdot)$ của bài toán (2.1) ta có*

$$|u(t) - u^*| \to 0 \ \textit{khi} \ t \to \infty.$$

Chương 3
NGHIỆM MẠNH CỦA HỆ g-NAVIER-STOKES HAI CHIỀU

Trong chương này, chúng tôi xét hệ g-Navier-Stokes hai chiều trong miền bị chặn với biên trơn. Đầu tiên, sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và phương pháp compact, chúng tôi chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm mạnh. Tiếp theo, khi ngoại lực không phụ thuộc thời gian, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh khi thời gian ra vô cùng dựa trên sự tồn tại tập hút toàn cục và tính ổn định của nghiệm dừng mạnh. Cuối cùng, chúng tôi xét vấn đề xấp xỉ nghiệm mạnh trong hai trường hợp: xấp xỉ trong khoảng thời gian hữu hạn và xấp xỉ dáng điệu tiệm cận khi thời gian tiến ra vô cùng.

Nội dung của chương này dựa trên các bài báo [2], [3] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^2$ với biên trơn Γ. Ta nghiên cứu hệ phương trình g-Navier-Stokes hai chiều sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p & = f \text{ trong } (0,T)\times\Omega, \\ \nabla\cdot(gu) & = 0 \text{ trong } (0,T)\times\Omega, \\ u & = 0 \text{ trên } (0,T)\times\Gamma, \\ u(x,0) & = u_0(x),\ x\in\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $u = u(x,t) = (u_1, u_2)$ là hàm véctơ vận tốc và $p = p(x,t)$ là hàm áp suất cần tìm, $\nu = \text{const} > 0$ là hệ số nhớt, u_0 là vận tốc ban đầu. Ta giả thiết hàm g thỏa mãn điều kiện sau:

(G) $g \in W^{1,\infty}(\Omega)$ thỏa mãn

$$0 < m_0 \le g(x) \le M_0, \forall\, x = (x_1, x_2)\in\Omega, \text{ và } |\nabla g|_\infty < m_0\lambda_1^{1/2},$$

ở đó $\lambda_1 > 0$ là giá trị riêng nhỏ nhất của toán tử g-Stokes trong Ω (tức là toán tử A trong Chương 1, mục 1.1).

3.2. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT CỦA NGHIỆM MẠNH

Trước tiên chúng ta định nghĩa nghiệm mạnh của bài toán (3.1).

Định nghĩa 3.1. Cho $f \in L^2(0,T;H_g)$ và $u_0 \in V_g$, nghiệm mạnh trên khoảng $(0,T)$ của bài toán (3.1) là hàm $u \in L^2(0,T;D(A)) \cap L^\infty(0,T;V_g)$ với $u(0) = u_0$ thỏa mãn:

$$\frac{d}{dt}(u(t),v)_g + \nu((u(t),v))_g + \nu(Cu(t),v)_g + b(u(t),u(t),v) = (f(t),v)_g$$

với mọi $v \in V_g$ và h.k. $t \in (0,T)$.

Tiếp theo ta đưa ra một số đánh giá tiên nghiệm đối với nghiệm mạnh của bài toán (3.1).

Bổ đề 3.1. *Nếu u là nghiệm mạnh của* (3.1) *trên* $(0,T)$ *thì*

$$\int_0^T ||u(t)||^2 dt \le K_1, \quad K_1 = K_1(|u_0|, \|f\|_{L^2(0,T;H_g)}, \nu, T, \lambda_1),$$

$$\sup_{s\in[0,T]} |u(s)|^2 \le K_2, \quad K_2 = K_2(|u_0|, \|f\|_{L^2(0,T;H_g)}, \nu, T, \lambda_1).$$

Bổ đề 3.2. *Nếu u là nghiệm mạnh của bài toán* (3.1) *trên* $(0,T)$ *thì*

$$\sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||^2 \le K_3, \quad K_3 = K_3(K_1, K_2),$$

$$\int_0^T |Au(t)|^2 dt \le K_4, \quad K_4 = K_4(K_1, K_2).$$

Định lí sau trình bày kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm mạnh của bài toán (3.1).

Định lí 3.1. *Giả sử $f \in L^2(0,T;H_g)$ và $u_0 \in V_g$ cho trước. Khi đó tồn tại duy nhất nghiệm mạnh u của bài toán* (3.1) *trên* $(0,T)$. *Hơn nữa, ánh xạ $u_0 \mapsto u(t)$ liên tục trên V_g với mọi $t \in [0,T]$, nghĩa là, nghiệm mạnh phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu.*

3.3. DÁNG DIỆU TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM MẠNH

Trong phần này, chúng ta giả thiết $f \in H_g$ và không phụ thuộc vào thời gian t. Khi đó, bởi Định lí 3.1, ta có thể định nghĩa nửa nhóm liên tục $S(t) : V_g \to V_g$ xác định bởi

$$S(t)u_0 = u(t),\ t \geq 0, u_0 \in V_g,$$

trong đó $u(t)$ là nghiệm duy nhất của bài toán (3.1) với điều kiện đầu $u(0) = u_0$. Ta sẽ chỉ ra rằng nửa nhóm này có tập hút toàn cục compact $\mathcal{A}$ trong V_g và khi ngoại lực f đủ "nhỏ", tập hút có dạng đặc biệt: $\mathcal{A} = \{u^*\}$, trong đó u^* là nghiệm dừng mạnh của bài toán (3.1).

3.3.1. Sự tồn tại tập hút toàn cục

Mệnh đề 3.1. *Nếu $f \in H_g$ thì tồn tại thời điểm $t_0 = t_0(|u_0|)$, các số dương ρ_{H_g} và I_{V_g} sao cho*

$$|u(t)| \leq \rho_{H_g},$$

và

$$\int_t^{t+1} ||u(s)||^2 ds \leq I_{V_g},\ \forall t \geq t_0.$$

Tiếp theo chúng ta có kết quả về sự tồn tại tập hấp thụ bị chặn trong V_g đối với nửa nhóm $S(t)$.

Mệnh đề 3.2. *Nếu $f \in H_g$ thì tồn tại thời điểm $t_1 = t_1(t_0)$, các số dương ρ_{V_g} và I_A sao cho*

$$||u(t)|| \leq \rho_{V_g},$$

và

$$\int_t^{t+1} |Au(s)|^2 ds \leq I_A, \quad \forall t \geq t_1.$$

Mệnh đề sau phát biểu về sự tồn tại tập hấp thụ bị chặn trong $D(A)$ của nửa nhóm $S(t)$.

Mệnh đề 3.3. *Nếu $f \in H_g$ thì tồn tại thời điểm $t_2 = t_2(t_1)$ và số dương ρ_A sao cho*

$$|Au(t)| \le \rho_A \quad \forall\, t \ge t_2.$$

Do phép nhúng $D(A) \hookrightarrow V_g$ là compact, ta có ngay kết quả sau.

Định lí 3.2. *Nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi bài toán* (3.1) *có tập hút toàn cục compact $\mathcal{A}$ trong không gian V_g.*

Nhận xét 3.2. Các kết quả trong mục này gần đây đã được chúng tôi mở rộng sang trường hợp ngoại lực f có thể phụ thuộc thời gian bằng cách sử dụng lí thuyết tập hút lùi.

3.3.2. Sự tồn tại duy nhất và tính ổn định của nghiệm dừng

Nghiệm dừng mạnh của bài toán (3.1) là phần tử $u^* \in D(A)$:

$$\nu((u^*, v))_g + \nu(Cu^*, v)_g + b(u^*, u^*, v) = (f, v)_g, \ \forall v \in V_g.$$

Định lí 3.3. *Nếu $f \in H_g$ thì*

(a) Bài toán (3.1) *có ít nhất một nghiệm dừng mạnh u^*. Hơn nữa, nghiệm này thỏa mãn*

$$\nu\Big(1 - \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}}\Big)||u^*|| \le \frac{1}{\lambda_1^{1/2}}|f|.$$

(b) Nếu có điều kiện sau:

$$\Big[\nu\Big(1 - \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}}\Big)\Big]^2 > \frac{c_1|f|}{\lambda_1}, \tag{3.25}$$

trong đó c_1 là hằng số trong Bổ đề 1.1, thì nghiệm dừng mạnh của bài toán (3.1) *là duy nhất.*

Định lí 3.4. *Giả sử $f \in H_g$ và điều kiện (3.25) thỏa mãn. Khi đó, với $u(\cdot)$ là nghiệm bất kì của bài toán (3.1), ta có*

$$|u(t) - u^*| \to 0 \text{ khi } t \to \infty.$$

3.4. XẤP XỈ NGHIỆM MẠNH

3.4.1. Xấp xỉ nghiệm mạnh trong khoảng thời gian hữu hạn

Trong phần này, chúng ta nghiên cứu vấn đề xấp xỉ nghiệm mạnh trong khoảng thời gian hữu hạn bằng cách sử dụng các lược đồ rời rạc không gian và thời gian. Cụ thể, rời rạc biến không gian như trong R. Temam (1979), đối với biến thời gian ta sử dụng lược đồ sau:

Với mọi h, gọi u_{0h} là phần tử chiếu (trong $H_0^1(\Omega, g)$) của u_0 trên V_h. Cho N là số nguyên dương, $k = T/N$. Với mọi h, k, ta xác định quy nạp họ $u_h^{m+i/2}$ các phần tử của $V_h, m = 0, ..., N-1, i = 1, 2$. Lấy phần tử đầu

$$u_h^0 = u_{0h}.$$

Giả sử $u_h^m, m \geq 0$ đã biết, ta xác định $u_h^{m+1/2}$ và u_h^{m+1} như sau:

$$u_h^{m+1/2} \in V_h,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}(u_h^{m+1/2} - u_h^m, v_h)_g + &\frac{\nu}{2}((u_h^{m+1/2}, v_h))_g \\ &+ \frac{\nu}{2}(Cu_h^{m+1/2}, v_h)_g = (f^m, v_h)_g \ \ \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

trong đó

$$f^m = \frac{1}{k}\int_{mk}^{(m+1)k} f(t)dt,$$

và

$$u_h^{m+1} \in W_h,$$

$$\frac{1}{k}(u_h^{m+1} - u_h^{m+1/2}, v_h)_g + \frac{\nu}{2}((u_h^{m+1}, v_h))_g + \frac{\nu}{2}(Cu_h^{m+1}, v_h)_g \\ + \widetilde{b}(u_h^{m+1}, u_h^{m+1}, v_h) = 0 \ \ \forall v_h \in W_h,$$

trong đó

$$\widetilde{b}(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{2} \int_\Omega \{u_i[(D_i v_j)w_j - v_j(D_i w_j)]\} g dx.$$

Từ họ các phần tử $u_h^{m+i/2}$ của W_h ta định nghĩa các hàm xác định trên khoảng $[0, T]$ như sau:

- $u_k^{(i)}$ là hàm hằng từng khúc nhận giá trị $u_h^{m+i/2}$ trên $[mk, (m+1)k)$, $\ i = 1, 2;\ m = 0, \ldots, N-1$.
- $\widetilde{u}_k^{(i)}$ là hàm liên tục từ $[0, T]$ vào W_h, tuyến tính trên $(mk, (m+1)k)$ nhận giá trị $u_h^{m+i/2}$ tại $mk, i = 1, 2;\ m = 0, \ldots, N-1$.

Tiếp theo ta nghiên cứu dáng điệu của $u_k^{(i)}, \widetilde{u}_k^{(i)}$, khi h, $k \to 0$.

Định lí 3.5. *Với giả thiết như trên, khi đó các hàm* $u_k^{(i)}, \widetilde{u}_k^{(i)}; i = 1, 2,$ *bị chặn trong* $L^2(0, T; H_0^1(\Omega, g)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega, g))$. *Hơn nữa, khi* k, $h \to 0$, $u_k^{(i)}$ *và* $\widetilde{u}_k^{(i)}$ *hội tụ đến nghiệm mạnh* u *của bài toán* (3.1) *trong* $L^2(0, T; H_0^1(\Omega, g))$ *và trong* $L^q(0, T; L^2(\Omega, g))$ *với mọi* $1 \leq q < \infty$.

3.4.2. Xấp xỉ dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh

Cho $f_1, f_2 \in C_b^0([0, \infty); H_g)$ và u_0, v_0 cho trước trong V_g. Kí hiệu u và v là hai nghiệm mạnh tương ứng của hai bài toán sau:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + \nu Au + \nu Cu + Bu & = f_1(t), \\ u(0) & = u_0, \end{cases} \tag{3.48}$$

và

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + \nu Av + \nu Cv + Bv & = f_2(t), \\ v(0) & = v_0. \end{cases} \tag{3.49}$$

Giả sử E là một không gian con hữu hạn chiều của V_g. Ta kí hiệu $P(E)$ là phép chiếu trực giao trong H_g xuống E, $Q(E) = I - P(E)$ và định nghĩa

$$\lambda(E) = \inf\{||\varphi||^2, \varphi \in V_g, P(E)\varphi = 0, |\varphi| = 1\},$$
$$\mu(E) = \sup\{||\psi||^2, \psi \in E, |\psi| = 1\}.$$

Định lí 3.6. *Giả sử u và v lần lượt là hai nghiệm mạnh của (3.48) và (3.49). Cho E là không gian con hữu hạn chiều của V_g thỏa mãn*

$$\lambda(E) > (\frac{c_1\rho_A}{\nu\gamma_0})^2, \tag{3.50}$$

trong đó c_1 là hằng số trong Bổ đề 1.1, ρ_A là hằng số trong Mệnh đề 3.3, $\gamma_0 = 1 - \dfrac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}} > 0$. Khi đó, nếu

$$|P(E)(u(t) - v(t))| \to 0, \ \ khi \ \ t \to \infty,$$

và

$$|(I - P(E))(f_1(t) - f_2(t))| \to 0, \ \ khi \ \ t \to \infty,$$

ta cũng có

$$|(I - P(E))(u(t) - v(t))| \to 0, \ \ khi \ \ t \to \infty,$$

nghĩa là,

$$|u(t) - v(t)| \to 0, \ \ khi \ \ t \to \infty.$$

Nhận xét 3.3. Định lí 3.6 nói rằng, nếu điều kiện (3.50) thỏa mãn thì dáng điệu khi $t \to +\infty$ của $u(t)$ hoàn toàn được xác định bởi dáng điệu của $P(E)u(t)$, tức là dáng điệu của $u(t)$ trên không gian con hữu hạn chiều E.

Chương 4

HỆ g-NAVIER-STOKES HAI CHIỀU VỚI TRỄ VÔ HẠN

Trong chương này, chúng ta xét hệ g-Navier-Stokes hai chiều trong trường hợp ngoại lực phụ thuộc trễ vô hạn. Đầu tiên, sử dụng phương pháp Galerkin và phương pháp compact, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm yếu của bài toán. Sau đó chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại duy nhất và tính ổn định của nghiệm dừng yếu.

Nội dung chương này dựa trên bài báo [4] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. ĐẶT BÀI TOÁN

Giả sử Ω là miền tùy ý (bị chặn hoặc không bị chặn) trong $\mathbb{R}^2$ với biên Γ. Ta nghiên cứu sự tồn tại và dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình g-Navier-Stokes hai chiều không ô-tô-nôm chứa trễ vô hạn sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p & = f(t) + F(t, u_t) \text{ trong } (\tau, T)\times\Omega, \\ \nabla\cdot(gu) & = 0 \ \text{ trong } (\tau, T)\times\Omega, \\ u & = 0 \ \text{ trên } \ (\tau, T)\times\Gamma, \\ u(\tau+s, x) & = \varphi(s, x),\ s\in(-\infty, 0], x\in\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó $u = u(x,t) = (u_1, u_2)$ là hàm véc tơ vận tốc, $p = p(x,t)$ là hàm áp suất, $\nu = \text{const} > 0$ là hệ số nhớt.

Trong suốt chương này, ta dùng kí hiệu sau: Giả sử X là không gian Banach, và hàm $u : (-\infty, T) \to X$. Với mỗi $t < T$, kí hiệu u_t là hàm xác định trên khoảng $(-\infty, 0]$ bởi $u_t(s) = u(t+s), s \in (-\infty, 0]$.

Để nghiên cứu trễ vô hạn ta xét bài toán trong không gian pha $C_\gamma(H_g)$, $\gamma > 0$, định nghĩa như sau:

$$C_\gamma(H_g) = \{\varphi \in C((-\infty, 0]; H_g) : \exists \lim_{s \to -\infty} e^{\gamma s}\varphi(s) \in H_g\}.$$

Đây là không gian Banach với chuẩn $||\varphi||_\gamma := \sup_{s\in(-\infty,0]} e^{\gamma s}|\varphi(s)|$.

Để nghiên cứu bài toán (4.1), ta giả thiết:

(H1) Ω là miền tùy ý (bị chặn hoặc không bị chặn) trong $\mathbb{R}^2$ với biên trơn Γ và thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré: Tồn tại $\lambda_1 > 0$ sao cho

$$\int_\Omega \varphi^2 g dx \le \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 g dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega);$$

(H2) $g \in W^{1,\infty}(\Omega)$ thỏa mãn

$$0 < m_0 \le g(x) \le M_0, \forall\, x = (x_1, x_2) \in \Omega, \text{ và } |\nabla g|_\infty < m_0\lambda_1^{1/2};$$

(H3) $f \in L^2(\tau, T; V_g')$;

(H4) $F(t, u_t) : (\tau, T) \times C_\gamma(H_g) \to L^2(\Omega, g)$ sao cho:
(i) $\forall \xi \in C_\gamma(H_g)$, ánh xạ $(\tau, T) \ni t \mapsto F(t, \xi)$ đo được,
(ii) $F(t, 0) = 0$ với mọi $t \in (\tau, T)$,
(iii) tồn tại hằng số $L_F > 0$ sao cho $\forall t \in (\tau, T)$ và $\xi, \eta \in C_\gamma(H_g)$:

$$|F(t, \xi) - F(t, \eta)| \le L_F||\xi - \eta||_\gamma.$$

4.2. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT CỦA NGHIỆM YẾU

Trước tiên chúng ta định nghĩa nghiệm yếu của bài toán (4.1) như sau.

Định nghĩa 4.1. Hàm u được gọi là một nghiệm yếu của bài toán (4.1) trên khoảng (τ, T) nếu

$$\begin{cases} u \in L^\infty(\tau, T; H_g) \cap L^2(\tau, T; V_g), \\ \dfrac{d}{dt}u(t) + \nu Au(t) + B(u(t), u(t)) + \nu Cu(t) = f(t) + F(t, u_t) \text{ trong } V_g', \\ u(\tau) = \varphi, \end{cases}$$

với h.k. $t \in (\tau, T)$.

Định lí sau trình bày kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán (4.1).

Định lí 4.1. *Giả sử $\varphi \in C_\gamma(H_g)$ cho trước và $2\gamma > \nu\lambda_1\gamma_0$, trong đó $\gamma_0 = 1 - \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}} > 0$. Khi đó tồn tại duy nhất một nghiệm yếu u của bài toán (4.1) trên khoảng (τ, T).*

4.3. SỰ TỒN TẠI DUY NHẤT VÀ TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA NGHIỆM DỪNG

Trong phần này, chúng ta nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất và tính ổn định của nghiệm dừng yếu của bài toán (4.1). Ta giả thiết các hàm $f \in V_g'$ và $F \in H_g$ không phụ thuộc thời gian. Ta coi $F(w)$ như là $F(w')$, ở đó $w' \in C_\gamma(H_g)$ là phần tử chỉ nhận giá trị w với thời gian $t \leq 0$.

Cố nhiên, theo giả thiết của F, ta có

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq L_F|x_1 - x_2|, \ \forall x_1, x_2 \in H_g.$$

Nghiệm dừng của bài toán (4.1) là phần tử $u^* \in V_g$ sao cho

$$\nu((u^*, v))_g + \nu(Cu^*, v)_g + b(u^*, u^*, v) = \langle f, v\rangle + (F(u^*), v)_g, \ \forall v \in V_g.$$

Định lí 4.2. *Với các kí hiệu và giả thiết nêu trên, nếu*

$$\nu\left(1 - \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right) > \frac{L_F}{\lambda_1},$$

thì:

(a) Bài toán (4.1) có ít nhất một nghiệm dừng u^*. Hơn nữa, nghiệm này thỏa mãn ước lượng sau:

$$\Big[\nu(1 - \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}}) - \frac{L_F}{\lambda_1}\Big] ||u^*|| \leq \|f\|_*.$$

(b) Nếu điều kiện sau thỏa mãn

$$\Big[\nu(1 - \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0 \lambda_1^{1/2}}) - \frac{L_F}{\lambda_1}\Big]^2 > \frac{c_1}{\lambda_1^{1/2}} \|f\|_*, \tag{4.27}$$

trong đó c_1 là hằng số xác định trong Bổ đề 1.1, thì nghiệm dừng của bài toán (4.1) là duy nhất.

Định lí sau trình bày kết quả về sự ổn định của nghiệm dừng yếu.

Định lí 4.3. *Với các giả thiết của Định lí 4.2, trong đó f, F không phụ thuộc thời gian và (4.27) đúng. Kí hiệu $u(t)$ là nghiệm của (4.1) với $\tau = 0$ và $\varphi \in C_\gamma(H_g)$, khi đó tồn tại giá trị $\lambda \in (0, 2\gamma)$ để có đánh giá sau đúng với mọi $t \geq 0$:*

$$|u(t) - u^*|^2 \leq e^{-\lambda t}(|\varphi(0) - u^*|^2 + \frac{L_F}{2\gamma - \lambda} ||\varphi - u^*||_\gamma^2),$$

$$\|u_t - u^*\|_\gamma \leq \max\Big\{e^{-2\gamma t}\|\varphi - u^*\|_\gamma^2, e^{-\lambda t}(|\varphi(0) - u^*|^2 + \frac{L_F}{2\gamma - \lambda}||\varphi - u^*||_\gamma^2)\Big\},$$

trong đó u^* là nghiệm dừng duy nhất của bài toán (4.1).

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. KẾT QUẢ ĐẠT ĐƯỢC

Luận án đã đạt được các kết quả sau:

1. Chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu, sự tồn tại và đánh giá số chiều fractal của tập hút lùi, sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm dừng yếu của hệ g-Navier-Stokes hai chiều trong miền không nhất thiết bị chặn mà chỉ cần thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré.

2. Chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm mạnh, sự tồn tại tập hút toàn cục và tính ổn định của nghiệm dừng mạnh của hệ g-Navier-Stokes hai chiều trong miền bị chặn. Chứng minh được các kết quả về xấp xỉ nghiệm trong khoảng thời gian hữu hạn và xấp xỉ dáng điệu tiệm cận của nghiệm.

3. Chứng minh được sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu, sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm dừng của hệ g-Navier-Stokes hai chiều trong trường hợp ngoại lực phụ thuộc trễ vô hạn, trong miền không nhất thiết bị chặn mà chỉ cần thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré.

2. KIẾN NGHỊ MỘT SỐ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

- Nghiên cứu các tính chất của tập hút nhận được trong luận án.
- Nghiên cứu tính chính qui nghiệm của hệ g-Navier-Stokes.
- Tiếp tục nghiên cứu việc xấp xỉ số nghiệm của hệ g-Navier-Stokes.
- Nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu và bài toán điều khiển được đối với hệ g-Navier-Stokes hai chiều.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. C.T. Anh and D.T. Quyet, Long-time behavior for 2D non-autonomous g-Navier-Stokes equations, *Ann. Polon. Math.* 103 (2012), 277-302.

2. C.T. Anh, D.T. Quyet and D.T. Tinh, Existence and finite time approximation of strong solutions to 2D g-Navier-Stokes equations, *Acta. Math. Viet.* 38 (2013), DOI 10.1007/s40306-013-0023-2.

3. C.T. Anh and D.T. Quyet, Long-time behavior and long-time approximation of strong solutions to g-Navier-Stokes equations, *submited to Bull. Pol. Acad. Math. Sci.*

4. C.T. Anh and D.T. Quyet, g-Navier-Stokes equations with infinite delays, *Viet. J. Math.* 40 (2012), 57-78.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại

- Xêmina của Khoa Công nghệ Thông tin, Học viện Kỹ thuật Quân sự;

- Xêmina của Bộ môn Toán học tính toán, Khoa Toán - Cơ - Tin, Trường Đại học học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội;

- Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

- Xêmina của Bộ môn Toán Cơ bản, Viện Toán ứng dụng và Tin học, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội;

- Hội nghị nghiên cứu các nhà khoa học trẻ, Học viện Kỹ thuật Quân sự, 2011.